FILOZOFIA I NAUKA
Studia filozoficzne i interdyscyplinarne
Tom 11, 2023

Elżbieta Drozdowska

PIERWSZE PRÓBY KONSTRUKCJI LOGIK NIEKLASYCZNYCH INSPIROWANYCH MECHANIKĄ KWANTOWĄ: ZYGMUNT ZAWIRSKI I JOHN VON NEUMANN[1]

doi: 10.37240/FiN.2023.11.1.9

STRESZCZENIE

Logika kwantowa pojawiła się w latach 30. XX wieku w wyniku postawienia pytania o to, czy konceptualne zmiany zapoczątkowane w fizyce przez mechanikę kwantową wymagają rewizji logiki. W literaturze anglojęzycznej za prekursora logiki kwantowej uznaje się Johna von Neumanna, natomiast w literaturze polskiej wskazuje się Zygmunta Zawirskiego. Zawirski był pierwszym badaczem, który zasugerował, że mechanika kwantowa może kierować się inną logiką niż logika klasyczna. Był pierwszym badaczem w ramach nurtu wielowartościowej logiki kwantowej, jednak jego wpływ okazał się ostatecznie niewielki. Z kolei John von Neumann wraz z Garrettem Birkhoffem zapoczątkowali dominujący dziś nurt algebraicznej logiki kwantowej. Okazuje się, że pomimo różnic założeń i metod, łączy ich podporządkowanie projektu logiki kwantowej dwóm wymaganiom – uwzględnieniu zasady nieoznaczoności Heisenberga i uzgodnieniu uzyskanej logiki z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Słowa kluczowe: Zygmunt Zawirski, John von Neumann, logika kwantowa, logika wielowartościowa, filozofia mechaniki kwantowej.

Mechanika kwantowa przybrała dojrzałą postać w latach 1925–1926, wraz z publikacją jej wersji macierzowej w artykule *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* Heisenberga i wersji falowej w artykule *Quantisierung als Eigenwertproblem* Schrödingera. Jak wiadomo, wkrótce okazało się, że budzi ona poważne spory interpretacyjne i filozoficzne, które nie zostały zakończone aż do dziś.

[1] Projekt badawczy finansowany w ramach programu Ministra Edukacji i Nauki pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019–202 nr projektu 028/RID/2018/19, kwota finansowania 11 742 500 zł.

Wśród nich pojawiła się myśl, że mechanika kwantowa ma konsekwencje tak odmienne od naszych codziennych intuicji, że musi być niezgodna z klasyczną logiką. Ta intuicja stoi u podstaw dziedziny badań zwanej logiką kwantową.

W literaturze anglojęzycznej za prekursora logiki kwantowej uznaje się powszechnie Johna von Neumanna (Dalla Chiara, Giuntini 2002, s. 129; Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 205; Rédei, 2009, s. 1; też m.in. Hajduk, 2011, s. 98), natomiast w literaturze polskiej wskazuje się często Zygmunta Zawirskiego (Kiczuk, 1975, s. 75; Pykacz, 2015, s. 29; Tkaczyk, 2018, s. 113; choć też m.in. Jammer, 1974, s. 344). Zawirski zaczął publikować na temat filozoficznych trudności związanych z mechaniką kwantową już trzy lata po jej sformułowaniu – w 1929 ukazał się artykuł *O szansach indeterminizmu w świetle nauki współczesnej* (Zawirski, 1929), następnie w 1930 *Teorja kwantów a zasada przyczynowości* (Zawirski, 1930), a w 1931 *Próby stosowania logiki wielowartościowej do współczesnego przyrodoznawstwa* (Zawirski, 1931a) i *W sprawie indeterminizmu fizyki kwantowej* (Zawirski, 1931b), gdzie po raz pierwszy wskazał na możliwość zastosowania logiki trójwartościowej Łukasiewicza do interpretacji fizyki kwantowej. W 1934 zaś w pracy *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa* (Zawirski, 1934) przedstawił inspirowany fizyką kwantową system logiki o dowolnie wielu wartościach logicznych. W przypadku von Neumanna pierwsza sugestia, że możliwe byłoby sformułowanie czegoś w rodzaju rachunku logicznego na podstawie relacji własności układów fizycznych i odpowiadających im podprzestrzeni przestrzeni Hilberta, pojawiła się w jego monografii na temat matematycznych podstaw mechaniki kwantowej z 1932 roku (Jammer, 1974, s. 347). Idee te przybrały dojrzałą postać dopiero w 1936 roku, w artykule *The Logic of Quantum Mechanics* napisanym wraz z Garrettem Birkhoffem (von Neumann, Birkhoff, 1936).

Zawirski oraz von Neumann i Birkhoff prezentują odmienne punkty wyjścia, motywacje i metody badania zaproponowanych przez siebie logik kwantowych. Można powiedzieć, że za ich sprawą przez pewien czas badania nad logiką kwantową prowadzone były dwutorowo: z jednej strony nad zastosowaniem logik wielowartościowych do mechaniki kwantowej pracowali Zygmunt Zawirski, Hans Reichenbach, Paulette Destouches-Février, Carl Friedrich von von Weizsäcker i Hilary Putnam (Jammer, 1974, s. 361–379), z drugiej – prace nad „zlogicyzowaniem" struktur algebraicznych znalezionych w formalizmie przestrzeni Hilberta mechaniki kwantowej (w szczególności krat ortomodularnych) po von Neumannie i Birkhoffie podjęli liczni badacze, zbyt liczni, by ich tu wymienić (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 217). Badania w ramach pierwszej linii wygasły w latach 70-tych XX wieku, po ostatnich propozycjach von Weizsäckera, które nie spotkały się z uznaniem ani filozofów, ani fizyków (Jammer, 1974, s. 379). Natomiast w ramach drugiego nurtu wciąż panuje ożywienie badawcze, o czym może świadczyć obszerna bibliografia opublikowana w 1992 r. przez Mladena Pavičića (Pavičić, 1992).

Wygląda więc na to, że choć chronologicznie to Zawirski opublikował swoje idee jako pierwszy, jego wpływ jest nieporównywalnie mniejszy niż von Neumanna. Może to być powód, dla którego to program badań zapoczątkowany przez von Neumanna jest obecnie zwany *standardową logiką kwantową* (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei 2007, s. 217), a sam von Neumann – prekursorem tej dziedziny badań (Rédei, 2009, s. 1). Nie znaczy to jednak, że zwolennicy pierwszego nurtu powiedzieli ostatnie słowo – w ostatnich latach badania w tym zakresie powróciły pod postacią wielowartościowej interpretacji mechaniki kwantowej (Pykacz, 2015) i kwantowych logik rozmytych (np. Dalla Chiara, Giuntini, Greechie, 2004). Dlatego oba nurty wciąż zasługują na uwagę.

Celem niniejszego tekstu jest zestawienie tych pierwszych, bardzo odmiennych prób sformułowania logiki kwantowej, zarówno od strony zastosowanych metod logiczno-matematycznych, jak i problemów konceptualnych, które skłoniły do podjęcia tych badań. W pierwszej części przedstawione zostaną problemy, które skłoniły Zawirskiego do zaproponowania stosowania logiki wielowartościowej do mechaniki kwantowej, a także przedstawiony zostanie projekt wielowartościowej logiki kwantowej Zawirskiego. W drugiej części omówiona zostanie logika podprzestrzeni przestrzeni Hilberta z *The Logic of Quantum Mechanics*, a także wpływ poglądów von Neumanna na temat rachunku prawdopodobieństwa na ostateczny kształt jego i Birkhoffa propozycji. W trzeciej części znajdzie się podsumowanie i porównanie obu projektów.

1. ZYGMUNT ZAWIRSKI – LOGIKA KOMPLEMENTARNOŚCI

Zygmunt Zawirski, polski logik i filozof, należał do szkoły lwowsko-warszawskiej. Wśród jego zainteresowań badawczych znajdowały się problemy filozoficzne związane z dwoma najsłynniejszymi teoriami fizycznymi XX wieku – ogólną teorią względności i mechaniką kwantową. Już w 1929 roku, zaledwie trzy lata po sformułowaniu matematycznych podstaw nowej teorii kwantów przez Erwina Schrödingera i Wernera Heisenberga, Zawirski rozważał problem naruszania zasady przyczynowości przez mechanikę kwantową (Zawirski, 1929, s. 181b–182a). Pewne uwagi wstępne sformułował w artykule *Teorja kwantów a zasada przyczynowości* z 1930 r., które następnie rozwinął w *W sprawie indeterminizmu fizyki kwantowej* z 1931 r., gdzie też w uwagach przy korekcie wskazał na możliwość zastosowania logiki trójwartościowej Łukasiewicza do interpretacji fizyki kwantowej. Natomiast w pracy *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa* z 1934 r. przedstawił inspirowany fizyką kwantową system logiki wielowartościowej, który za Kiczukiem nazywać będziemy systemem Z (Kiczuk, 1975, s. 75).

1.1. Konceptualne źródła logiki kwantowej Zawirskiego

Jak relacjonuje Zawirski w *Teorji kwantów a zasadzie przyczynowości*, pierwsze próby podważenia zasady przyczynowości na gruncie fizyki pojawiły się już w pierwszym okresie rozwoju teorii kwantów (1900–1925) za sprawą Einsteina (Zawirski, 1930, s. 297). Próbując wyjaśnić zjawisko promieniowania elektronów przeskakujących między dwoma orbitami w modelu atomu Nielsa Bohra, doszedł do wniosku, że rządzące nim prawa można wyprowadzić z praw statystycznych, jeśli przyjmie się założenie, że istnieją dwa źródła promieniowania: wywołane przez wpływ otaczającego pola (emisja lub absorpcja) oraz „promieniowanie spontaniczne bez żadnej przyczyny zewnętrznej" (Zawirski, 1930, s. 297). W późniejszym czasie zaczęły się pojawiać głosy, że być może zasada przyczynowości nie jest niepodważalna, a wszystkie prawa fizyki mają charakter statystyczny (Zawirski, 1930, s. 298). W drugim okresie rozwoju fizyki kwantowej (po 1925 roku) okazało się, że prawa mechaniki kwantowej mają charakter statystyczny, a nie ściśle przyczynowy: pozwalają jedynie na obliczenie możliwych wyników pomiarów oraz prawdopodobieństw ich wystąpienia. Jednak „ostateczny cios", jak nazywa to Zawirski, zadała zasadzie przyczynowości zasada nieoznaczoności Heisenberga (Zawirski, 1930, s. 298).

Zasada nieoznaczoności ma postać: $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$, gdzie Δx – nieoznaczoność pomiaru położenia, Δp_x – nieoznaczoność pomiaru pędu względem osi x, h – stała Plancka. Zgodnie z nią, im dokładniej zmierzymy położenie układu, tym mniej dokładny jest jego pęd i *vice versa* – im dokładniej doookreślony pęd, tym mniej dokładne położenie. Pary wielkości fizycznych objętych zasadą nieoznaczoności Heisenberga nazywamy parami wielkości sprzężonych kanonicznie. Poza położeniem i pędem sprzężone kanonicznie są również energia i czas.

Dla powstania logiki kwantowej Zawirskiego istotna okazała się zasada komplementarności Bohra (stąd też nazwa podrozdziału), którą łączy silny związek z zasadą nieoznaczoności Heisenberga, choć sformułowane zostały niezależnie od siebie (Pabjan, 2011, s. 18). Zasada ta, choć nieprecyzyjna i wieloznaczna, stwierdza, że istnieją pary pojęć czy wielkości *komplementarnych*, czyli wzajemnie się uzupełniających, ale i wykluczających, co oznacza, że oba są potrzebne do uzyskania pełnego opisu rzeczywistości, ale nie mogą być równocześnie zastosowane (Pabjan, 2011, s. 14–18). Taką parę komplementarną stanowią między innymi, w ujęciu Bohra, opis przestrzenno-czasowy i przyczynowy, a w terminologii Zawirskiego – falowe i korpuskularne ujęcie zjawisk fizycznych. Opis przestrzenno-czasowy to lokalizacja obiektu w przestrzeni i czasie; z kolei opis przyczynowy to podanie reguł rządzących zachowaniem układu – które oparte są na zasadach zachowania pędu i zachowania energii. W mechanice klasycznej oba te opisy można stosować jednocześnie. W mechanice kwantowej jednak nie można tego zrobić z powodu zachodzenia związków nieoznaczoności pomiędzy parami wielkości fizycznych, z których jedna należy do opisu przestrzenno-czasowego, a druga do przyczynowego. Oznacza to, że im dokładniej określimy wielkości fizyczne należące do opisu przestrzenno-czasowego (położenie, czas), tym mniej dokładnie możemy określić opis przyczynowy (pęd, energia), i odwrotnie. Nigdy nie można uzyskać obu z dowolną dokładnością. Granicę dokładności wyznacza stała Plancka h.

Zgodnie z korpuskularnym ujęciem zjawisk, jak pisze Zawirski, świat składa się z wielkiej liczby oddzielnych, zlokalizowanych w czasie i przestrzeni bytów, a według ujęcia falowego świat należy traktować jako pole, jeden byt, w którym korpuskuły są tylko centrami energii w owym polu (Zawirski, 1930, s. 296). Obrazy te są zupełnie odmienne i niezgodne ze sobą, i znajdowały się przez długi czas w konflikcie, który próbowano rozwiązać np. przez sprowadzenie jednego z nich do drugiego. Jednak zgodnie z zasadą komplementarności oba te ujęcia są równie uprawnione, a sprzeczność między nimi, według słów Bohra, jest pozorna (Zawirski, 1931b, s. 482). Jest to dla Zawirskiego bardzo kontrowersyjne, gdyż

> „dawny przedmiot sporu między pluralizmem a monizmem, na próżno przez filozofów dziesiątki wieków roztrząsany, znajduje nagle rozwiązanie we fizyce (oczywiście tylko w odniesieniu do świata fizykalnego) [...] Zdumiewać tu musi każdego nie tylko sam fakt, iż antynomia, która zdawała się przekraczać granice poznania ludzkiego, okazuje się zdolną do naukowego rozwiązania, ale nadto zdumiewa sam sposób jej rozwiązania. Z dwu zdań sprzecznych oba uznane są za prawdziwe, niezgodność ich ma być pono tylko pozorna, gdyż żadne z nich stosowane do faktów nie da się przemyśleć konsekwentnie do końca bez odwołania się do drugiej tezy" (Zawirski, 1930, s. 296–297).

W sprawozdaniu *Próby stosowania logiki wielowartościowej do współczesnego przyrodoznawstwa* z 1931 r. oraz w artykule *Les logiques nouvelles et le champ de leurs applications* z 1932 r. Zawirski wymienia podstawowe problemy współczesnego przyrodoznawstwa i podaje propozycję, jak sobie z nimi poradzić. Problemy te to: 1) zasada nieoznaczoności Heisenberga, 2) zasada komplementarności Bohra, 3) pogląd, że wszystkie prawa przyrody, z wyjątkiem co najwyżej takich jak prawo zachowania energii, są „tylko prawdopodobne"[2] (Zawirski 19313a, s. 40–41). W końcowych uzupełnieniach przy korekcie do artykułu *W sprawie indeterminizmu fizyki kwanto-*

[2] Wyrażenie to jest dwuznaczne, ponieważ nie jest jasne, czy Zawirski ma na myśli to, że same prawa fizyki są „tylko prawdopodobne", czy że mają one charakter statystyczny i dają przewidywania „tylko prawdopodobne". Dalsze wywody zdają się wskazywać, że chodzi głównie o drugą interpretację.

wej Zawirski stwierdza, że zastanawiając się nad teorią komplementarności Bohra doszedł do wniosku, że

> „teorya komplementarności da się zrozumieć tylko w terminach logiki trójwartościowej Prof. Łukasiewicza. Zdania »dany proces jest korpuskularny« i »dany proces jest falowy« mają jednakową wartość logiczną, nie są jednak zdaniami prawdziewemi ani fałszywemi. Odnośne procesy wykazują tylko niektóre własności procesów falowych i niektóre własności procesów korpuskularnych. To zaś nie znaczy, aby dany proces składał się z korpuskułów i fal zarazem. Antynomiczny charakter twierdzeń paralelizmu fizyki korpuskularnej i falowej znika więc przez przypisanie odnośnym zdaniom trzeciej wartości logicznej” (Zawirski, 1931b, s. 482).

Zdania „dany proces jest korpuskularny” i „dany proces jest falowy” są ze sobą sprzeczne, ponieważ opisują proces w zupełnie różnych, niezgodnych ze sobą kategoriach. Są jednak argumenty za tym, aby uznać je oba. Wydaje się, że w tej sytuacji są dwa wyjścia: albo odrzucić zasadę niesprzeczności, albo przypisać obu zdaniom wartość logiczną inną od prawdy i fałszu. Zawirski wybiera przypisanie im trzeciej wartości logicznej – „możliwości”.

Jak się jednak okazuje, logika trójwartościowa nie wystarczy. Omawiając problem 1) i 3), Zawirski stwierdza, że zasada nieoznaczoności i statystyczny charakter praw fizyki skłaniają do stosowania logiki nieskończeniewielowartościowej (Zawirski, 1931b, s. 42). Zawirski widzi jej miejsce wszędzie tam, gdzie zamiast klasycznych przyczynowych praw mechaniki mamy do czynienia z prawami o charakterze statystycznym, przewidującymi zdarzenia o różnym stopniu prawdopodobieństwa. Sądzi jednak, że poprawnie powinniśmy mówić o zdarzeniach o różnym stopniu możliwości (Zawirski, 1931b, s. 42). Zawirski przywołuje logikę nieskończeniewielowartościową Łukasiewicza, w której przypisuje się różnym stopniom możliwości ułamki z zakresu od 0 do 1, podobnie jak w rachunku prawdopodobieństwa przypisuje się stopnie prawdopodobieństwa. Uważa, że logika ta powstała przez analogię z rachunkiem prawdopodobieństwa i stanowi nowy sposób ujęcia jego podstaw, a logika dwuwartościowa i trójwartościowa są w niej zawarte jako specjalne przypadki (Zawirski, 1931b, s. 40). Co więcej, Zawirski podkreśla, że fizyka kwantowa zdaje się opowiadać za obiektywną interpretacją rachunku prawdopodobieństwa, w której widzi on jej powiązanie z logiką wielowartościową (Zawirski, 1934b, s. 397). Z tego względu można ją zastosować w przyrodoznawstwie. Należy wpierw jednak ściślej powiązać logikę nieskończeniewielowartościową z rachunkiem prawdopodobieństwa. Zawirski zrobił to w 1934 r., w pracy *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa*.

1.2. Formalny system logiki kwantowej Zawirskiego

Szczegółowy opis i dyskusja zaproponowanego przez Zawirskiego systemu logiki wielowartościowej znajduje się w pracach *Zygmunta Zawirskiego koncepcja logiki mechaniki kwantowej* Kiczuka (Kiczuk, 1975) i *Próba rekonstrukcji systemu Z i jego podstaw filozoficznych* Pawła Garbacza (Garbacz, 1997). Garbacz proponuje formalizację systemu, dzięki której opisowy wywód Zawirskiego staję się bardziej konkretny i czytelny, dlatego też przyjęte tu zostanie jego ujęcie (Garbacz, 1997, s. 101–108). Garbacz przyjmuje nazwę „system Z", zaproponowaną przez Kiczuka, i tą też będziemy się posługiwać. Przedstawienie systemu zostanie skrojone pod ilustrację głównej idei Zawirskiego – mianowicie powiązania logiki wielowartościowej z rachunkiem prawdopodobieństwa na potrzeby fizyki kwantowej.

Zawirski uważa, że warunkiem powiązania logiki wielowartościowej z rachunkiem prawdopodobieństwa jest przyjęcie interpretacji Emila Posta zdań logik n-wartościowych jako zbiorów uporządkowanych (n-1) zdań klasycznej logiki dwuwartościowej. W interpretacji tej, jeśli wszystkie zdania należące do zbioru są fałszywe, to odpowiadające mu zdanie logiki wielowartościowej jest fałszywe; jeśli jedno zdanie w zbiorze jest prawdziwe, a pozostałe są fałszywe, to odpowiadające mu zdanie logiki wielowartościowej ma wartość logiczną 1/(n-1); jeśli dwa zdania należące do zbioru są prawdziwe, a pozostałe są fałszywe, to odpowiadające mu zdanie logiki wielowartościowej ma wartość logiczną 2/(n-1); itd. Pozwala to na potraktowanie wartości logicznych jako miary. Zawirski podkreśla analogię do rachunku prawdopodobieństwa, gdzie prawdopodobieństwo zdarzenia A można najprościej określić jako stosunek liczby zdarzeń sprzyjających A do liczby wszystkich zdarzeń (przy założeniu wykluczania się zdarzeń).

Załóżmy, że rozważamy W+1-wartościowy system Z, gdzie W jest ustaloną liczbą naturalną. Wartości logiczne są elementami zbioru LZ_W, gdzie:

$$LZ_W = \left\{x : x = \frac{m}{W}, 0 \leq m \leq W\right\}, m \in \mathbb{N}$$

Na język systemu Z składają się następujące znaki pierwotne:

a) zmienne zdaniowe *p, q, r,...,*

b) stałe logiczne: dwuargumentowa alternatywa $\vee_0$ oraz jednoargumentowa negacja cykliczna Posta – [3],

c) nawiasy.

Wprowadzamy oznaczenie iteracji negacji cyklicznej:

NC1) $-^n \varphi \equiv - \varphi$

NC2) $-^{m+1} \varphi \equiv - -^m \varphi$

[3] Wyrażenia utworzone przy pomocy negacji cyklicznej Posta w logice wielowartościowej (dla przykładu logiki siedmiowartościowej) przyjmują następujące wartości: $-(t_1=1) = (t_2=5/6)$; $-(t_2=5/6) = (t_3=4/6)$, ..., $-(t_7=0) = (t_1=1)$.

W systemie Z obowiązują następujące reguły składania znaków:

R1) Jeśli wyrażenie φ jest zmienną zdaniową, to wyrażenie φ jest poprawnie zbudowanym wyrażeniem systemu Z.

R2) Jeśli wyrażenie φ jest poprawnie zbudowanym wyrażeniem systemu Z, to wyrażenie – φ jest poprawnie zbudowanym wyrażeniem systemu Z.

R3) Jeśli wyrażenia φ, ψ są poprawnie zbudowanymi wyrażeniami systemu Z, to wyrażenie φ $\vee_0$ ψ jest poprawnie zbudowanym wyrażeniem systemu Z.

Matrycą adekwatną systemu Z jest matryca M_W:

$$M_W = \left(LZ_W, \vee_0 (x, y), -(x), \left\{ \frac{W}{W} \right\} \right),$$

gdzie $x, y \in LZ_W$.

Jej funkcje są określone następująco:

$$\vee_0 (x, y) = max(x, y)$$

$$-\left(\frac{m}{W}\right) = \begin{Bmatrix} \frac{(m-1)}{W}, jeślim \neq 0 \\ \frac{W}{W}, jeślim = 0 \end{Bmatrix}$$

Za pomocą tych funkcji można zdefiniować funkcje *verum* i τ Posta:

$$ver(x) = \frac{W}{W},$$

$$\tau_x\left(\frac{m}{W}\right) = \begin{Bmatrix} x, jeślim = W \\ \frac{0}{W}, jeślim \neq W \end{Bmatrix},$$

gdzie $\frac{0}{W} \leq x \leq \frac{W}{W}$.

Funkcjom tym odpowiadają funktory prawdziwościowe VER i T_x:

$$VER(p) \equiv p \vee_0 - p \vee_0 -^2 p \vee_0 \ldots \vee_0 -^{W-1} p \vee_0 -^W p,$$

$$T_x(p) \equiv -^W\{-^W[-ver(p) \vee_0 p] \vee_0 -^{W-m+1} p\},$$ gdzie $x = \frac{m}{W}$.

Funkcja *verum* przyjmuje zawsze wartość wyróżnioną. Funkcja τ natomiast przyjmuje wartość 0 dla wszystkich argumentów z wyjątkiem wartości wyróżnionej, dla której przyjmuje wybraną wartość logiczną $\frac{m}{W}$. Analogicznie jest z funktorami VER i T_x. Przy pomocy funktora T_x można zdefiniować dowolny funktor w systemie Z, na przykład negację kardynalną. Dowolny funktor jednoargumentowy *F* o tabeli prawdziwościowej w logice *W*+1-wartościowej:

p	*W/W*	*(W-1)/W*	...	*1/W*	*0/W*
F(p)	x_1	x_2	...	x_W	x_{W+1}

można zdefiniować przy pomocy wzoru Posta:

$$F(p) \equiv T_{x_1}(p) \vee_0 T_{x_2}(-^{W}p) \vee_0 T_{x_3}(-^{w-1}p) \vee_0 \ldots \vee_0 T_{x_W}(-^{2}p) \vee_0 T_{x_{W+1}}(-p).$$

Definicja negacji kardynalnej wygląda następująco:

$$\neg p \equiv T_{\frac{0}{W}}(p) \vee_0 T_{\frac{1}{W}}(-^{W}p) \vee_0 T_{\frac{2}{W}}(-^{w-1}p) \vee_0 \ldots \vee_0 T_{\frac{W-1}{W}}(-^{2}p) \vee_0 T_{\frac{W}{W}}(-p).$$

Odpowiadająca jej funkcja ma postać: $\neg p = 1 - p$.

Przy pomocy negacji kardynalnej zaś można zdefiniować odpowiadającą alternatywie $\vee_0$ koniunkcję $\wedge_0$:

$$p \wedge_0 q \equiv \neg(\neg p \vee_0 \neg q),$$

której odpowiada funkcja:

$$\wedge_0 (x, y) = min(x, y).$$

Przy ich pomocy można również wprowadzić definicję implikacji →:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

oraz funkcję:

$$\rightarrow (x, y) = \begin{Bmatrix} 1, jeślix \leq y \\ 1 - x + y, jeślix > y \end{Bmatrix}$$

Celem Zawirskiego jest uzyskanie podobieństwa formalnego między systemem Z a rachunkiem prawdopodobieństwa. Polegać ma ono na tym, że każdemu twierdzeniu rachunku prawdopodobieństwa o prawdopodobieństwie zdarzenia *A*, będącego sumą (iloczynem) zdarzeń, odpowiada zdanie *P*, które jest alternatywą (koniunkcją) zdań logiki wielowartościowej Z. Liczba będąca miarą prawdopodobieństwa zdarzenia *A* jest równa wartości logicznej zdania *P* (Garbacz, 1997, s. 113). By uzyskać to podobieństwo, Zawirski wprowadza dodatkowe funktory.

Funkcja $\vee_0 (x, y) = max(x, y)$ odpowiada funktorowi alternatywy zdefiniowanej jako $p \vee_0 q = ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$. Zawirski zwraca uwagę, że funktor alternatywy można zdefiniować również jako $p \vee_V q = \neg p \rightarrow q$, gdzie $V = W/2$, gdy W jest liczbą parzystą, i $V = (W\text{-}1)/2$, gdy W jest liczbą nieparzystą. Funktorowi temu odpowiada funkcja $\vee_V (x, y) = x \oplus y$, gdzie $x = \frac{n}{W}$, $y = \frac{m}{W}$, a operacja $x \oplus y$ jest zdefiniowana jako:

$$x \oplus y = \begin{Bmatrix} \frac{(n+m)}{W}, jeślin + m \leq W \\ \frac{W}{W}, jeślin + m > W \end{Bmatrix}.$$

Analogicznie zdefiniujemy operację $x \ominus y$:

$$x \ominus y = \begin{Bmatrix} \frac{(n-m)}{W}, jeślin > m \\ \frac{0}{W}, jeślin \leq m \end{Bmatrix}.$$

Pierwszą z tych alternatyw Zawirski nazywa alternatywą minimalną, a drugą – alternatywą maksymalną. W logice dwuwartościowej definicje te są równoważne. Różnica między nimi ujawnia się w logice trójwartościowej, w sytuacji gdy $p = 1/2$ i $q = 1/2$: alternatywa minimalna $p \vee_0 q$ ma wtedy wartość 1/2, a alternatywa maksymalna $p \vee_V q$ ma wartość 1. W logice trójwartościowej Zawirski preferuje tę drugą definicję, jako zgodną z sumowaniem prawdopodobieństw zdarzeń wykluczających się w rachunku prawdopodobieństwa (Zawirski, 1934a, s. 18). Na gruncie logiki o dowolnej liczbie wartości logicznych, a w omawianym przypadku – siedmiowartościowej – korzysta z obu. Zgodnie z nimi, gdy $p = 3/6$ i $q = 3/6$, alternatywa $p \vee_0 q$ ma wartość 3/6, a $p \vee_V q$ ma wartość 1. Zawirski zauważa, że aby uzyskać pełne podobieństwo logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa, trzeba uwzględnić jeszcze dwa możliwe wyniki, które mogą się pojawić w przypadku sumowania zdarzeń częściowo krzyżujących się: alternatywy, które przy $p = 3/6$ i $q = 3/6$ wynoszą 4/6 i 5/6. Zawirski zauważa łącznie dziesięć takich brakujących wyników w logice siedmiowartościowej (Zawirski, 1934a, s. 42; por. też s. 34):

2/6 + 2/6 = 3/6
2/6 + 3/6 = 4/6
2/6 + 4/6 = 5/6
3/6 + 2/6 = 4/6
3/6 + 4/6 = 5/6
4/6 + 2/6 = 5/6
4/6 + 3/6 = 5/6
4/6 + 4/6 = 5/6

3/6 + 3/6 = 5/6

3/6 + 3/6 = 4/6

Przypadki te różnią się dla danych par argumentów od alternatywy maksymalnej i minimalnej o 1/6 lub 2/6. Zawirski postuluje, że można je uzyskać przez zdefiniowanie nowych, dodatkowych funktorów alternatywy. Funktory te dla ośmiu pierwszych wierszy można określić jako przyjmujące wartość o 1/6 mniejszą od alternatywy maksymalnej lub o 1/6 większą od alternatywy minimalnej. Te same wartości można więc wyrazić jako dwa różne funktory, które oznaczymy jako $\vee_{max-1}$ i $\vee_{min+1}$. Dziewiąty wiersz jest o 2/6 większy od alternatywy minimalnej i o 1/6 mniejszy od alternatywy maksymalnej. Można go więc wyrazić przez funktory, które oznaczymy jako $\vee_{max-1}$ i $\vee_{min+2}$. Dziesiąty wiersz jest o 2/6 mniejszy od alternatywy maksymalnej i o 1/6 większy od alternatywy minimalnej dla danych wartości argumentów. Odpowiednie funktory dla argumentów o tych wartościach logicznych oznaczymy jako $\vee_{max-2}$ i $\vee_{min+1}$.

Ogółem mamy w systemach Z następujące funktory alternatywy (Garbacz, 1997, s. 106): $\vee_0$, $\vee_{max-1}$, $\vee_{min+1}$, $\vee_{max-2}$, $\vee_{min+2}$, …, $\vee_{max-(V-1)}$, $\vee_{min+(V-1)}$, $\vee_V$. Odpowiadające im funkcje można zdefiniować następująco:

$$\vee_{max-m}(x,y) = \begin{cases} x \oplus y, jeśli (x \oplus y) - max(x,y) < \dfrac{m+1}{W} \\ (x \oplus y) \ominus \dfrac{m}{W}, jeśli (x \oplus y) - max(x,y) \geq \dfrac{m+1}{W} \end{cases}$$

$$\vee_{min+m}(x,y) = \begin{cases} max(x,y), jeśli (x \oplus y) - max(x,y) < \frac{m+1}{W} \\ max(x,y) \oplus \frac{m}{W}, jeśli (x \oplus y) - max(x,y) \geq \frac{m+1}{W} \end{cases}$$ [4]

gdzie $1 \geq m \geq V$.

Widzimy więc, że dodatkowe funktory alternatywy pojawiają się wtedy, gdy różnica pomiędzy wartościami logicznymi wyrażeń utworzonych przy pomocy alternatyw $\vee_0$ i $\vee_V$ staje się większa niż $1/W$.

Zawirski pokazuje, że funktory te można zdefiniować na dwa sposoby: przy pomocy ogólnego wzoru Posta i przy pomocy skróconej metody Zawirskiego. Przyjmijmy następujące oznaczenie dla sumowania logicznego:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} \phi_i \equiv \phi_1 \vee_0 \phi_2 \vee_0 \ldots \vee_0 \phi_{m-1} \vee_0 \phi_m.$$

Ogólny wzór Posta dla funktorów dwuargumentowych $p{*}q$ wygląda następująco:

$$p * q \equiv \textstyle\sum_{m=0}^{W} \sum_{n=0}^{W} T_j(-^{m+1}p) \wedge_0 T_j(-^{n+1}q),$$

[4] Zaproponowane przez Garbacza funkcje zdefiniowane są następująco:

$$\vee_{max-m}(x,y) = \begin{cases} x \oplus y, jeśli (x \oplus y) - max(x,y) < m+1 \\ max(x,y) \oplus \frac{m}{W}, jeśli (x \oplus y) - max(x,y) \geq m+1 \end{cases},$$

$$\vee_{min+m}(x,y) = \begin{cases} max(x,y), jeśli (x \oplus y) - max(x,y) < m+1 \\ max(x,y) \oplus \frac{m}{W}, jeśli (x \oplus y) - max(x,y) \geq m+1 \end{cases}.$$

Wymagają jednak korekty. W obecnej postaci po prawej stronie nierówności znajduje się m+1. Liczba m jest liczbą naturalną, przedstawia liczbę „jednostek” wartości logicznej, o którą korygowana jest funkcja, stąd prawa strona nierówności jest zawsze większa lub równa 1. Natomiast po lewej stronie nierówności znajduje się różnica pomiędzy wartościami alternatywy maksymalnej i minimalnej, co zawsze jest mniejsze od 1. Stąd przy obecnym sformułowaniu zawsze spełniona jest pierwsza nierówność z pary.

Ponadto w definicji $\vee_{max-m}$ zamiast odjęcia od alternatywy maksymalnej m jednostek mamy dodanie m jednostek do alternatywy minimalnej, co nie zawsze daje prawidłowy wynik. Weźmy dziewiąty wiersz spośród dziesięciu wymienionych nieuwzględnionych przypadków sumowania w logice siedmiowartościowej: 3/6+3/6 = 5/6. Powinniśmy zastosować tutaj funkcję $\vee_{max-1}$. Jeśli podstawimy w tym wzorze m=1, x=3/6, y=3/6, to $max(x,y) \oplus \frac{m}{W}$ wyniesie 4/6, a nie 5/6.

gdzie j to wartość, jaką przyjmuje wyrażenie $p*q$ dla określonego $p = \frac{m}{W}, q = \frac{n}{W}$. Dodatkowe funktory alternatywy można przy jego pomocy zdefiniować następująco (Garbacz, 1997, s. 107–108):

$$p \vee_{max-i} q \equiv \sum_{m=0}^{W} \sum_{n=0}^{W} T_j\left(-^{m+1}p\right) \wedge_0 T_j\left(-^{n+1}q\right), gdzie j = \vee_{max-i}\left(\frac{m}{W}, \frac{n}{W}\right),$$

$$p \vee_{min+i} q \equiv \sum_{m=0}^{W} \sum_{n=0}^{W} T_j\left(-^{m+1}p\right) \wedge_0 T_j\left(-^{n+1}q\right), gdzie j = \vee_{min+i}\left(\frac{m}{W}, \frac{n}{W}\right).$$

Widzimy, że aby obliczyć wartość logiczną wyrażenia $p*q$ przy ustalonej wartości p i q musimy zsumować logicznie $(W+1)^2$ iloczynów logicznych dwóch funktorów T_j. Dla logiki siedmiowartościowej daje to sumę 49 iloczynów. Dlatego też Zawirski stwierdza, że „wzór ten nie posiada żadnej wartości praktycznej" (Zawirski, 1934a, s. 55) i proponuje własny skrócony sposób definiowania alternatyw (Zawirski, 1934a, s. 63), który jednak, jak wykazuje Garbacz (Garbacz, 1997, s. 107), okazuje się niestety błędny. Niemniej uzyskany wynik pozwala Zawirskiemu stwierdzić, że dzięki zastosowaniu funkcji τ udało mu się nadać funkcjom matematycznym z rachunku prawdopodobieństwa charakter funkcji prawdziwościowych (Zawirski, 1934a, s. 65). Wartości logiczne wyrażeń odpowiadających wszystkim możliwym do uzyskania sumom i iloczynom prawdopodobieństw można uzyskać poprzez zastosowanie jedynie funktorów prawdziwościowych – udało się więc zachować postulowany przez Zawirskiego paralelizm między formalizmami logiki wielowartościowej i rachunku prawdopodobieństwa.

Mimo że projekt Zawirskiego osiągnął sukces, to nie jest on jednak pozbawiony trudności: przede wszystkim jest on „wysoce skomplikowany i mało użyteczny" (Garbacz, 1997, s. 117). Systemy z rodziny systemów Z są wieloalternatywne i wielokoniunkcyjne – nie tylko w każdym $W+1$-wartościowym systemie trzeba zdefiniować wiele funktorów alternatywy i koniunkcji, ale też stałe logiczne w systemach o różnych wartościach logicznych nie są identyczne – z tego powodu Garbacz mówi o rodzinie systemów, a nie systemie Z (Garbacz, 1997, s. 103). Co więcej, obliczenie wartości logicznej wyrażenia $p*q$ przy ustalonej wartości p i q wymaga zsumowania logicznie $(W+1)^2$ iloczynów logicznych dwóch funktorów T_j. Dla logiki siedmiowartościowej daje to sumę 49 iloczynów, by uzyskać jeden element matrycy funktora *. Trudnością w zastosowaniu systemu Z może być też to, że mimo iż znane są wartości logiczne zdań składowych, nie można obliczyć wartości logicznej zdania złożonego przy pomocy koniunkcji lub alternatywy, dopóki nie ustali się, który funktor należy wybrać. Tym zaś, co decyduje o tym, który funktor w danej sytuacji wybrać, jest według Zawirskiego metryczna interpretacja logiki wielowartościowej. Zawirski stwierdza, że „z chwilą, gdy każdemu zdaniu logiki wielowartościowej przyporządkujemy klasy zdań logiki dwuwartościowej, stosunki między tymi klasami będą decydowały o wyborze funkcji logicznej. Zatem o wyborze funktora decyduje postawa empiryczna" (Zawirski, 1934a, s. 65). Jeśli więc po zastosowaniu interpretacji metrycznej, np. zebraniu serii siedmiu zdań raportujących wyniki eksperymentu, okaże się, że wartość logiczna zdania $p \vee_x q$ wynosi 4/6, podczas gdy wartość logiczna p = 3/6, a q = 3/6, to będziemy wiedzieli, że $\vee_x$ to w istocie $\vee_{min+1}$. Ponadto liczba zebranych zdań będzie decydowała o liczbie wartości logicznych w używanym systemie Z. Wszystko to sprawia, że systemy Zawirskiego nie zyskały na popularności.

2. JOHN VON NEUMANN – LOGIKA PRZESTRZENI FAZOWEJ

Pierwsze sugestie dotyczące możliwości stworzenia czegoś na kształt rachunku zdań mechaniki kwantowej pojawiły się już w książce von Neumanna *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* z 1932 r., gdzie okazuje się, że „relacja między własnościami układu fizycznego z jednej strony, a projekcjami z drugiej, umożliwia utworzenie przy ich pomocy pewnego rodzaju rachunku logicznego"[5] (von Neumann, 1955, s. 253). Dopiero jednak w artykule *The Logic of Quantum Mechanics*, który von Neumann napisał wspólnie z Garrettem Birkhoffem w 1936 r., te pierwsze intuicje zostały uwyraźnione i dopracowane. Była to pierwsza i ostatnia publikacja Birkhoffa i von Neumanna na temat logiki kwantowej, mimo że von Neumann nie uważał opublikowanych ustaleń za ostateczne. Po 1936 wciąż się z nią zmagał. W 1945 r. obiecał wystąpić podczas Czternastych Wykładów Josepha Henry'ego z wykładem pt. *Logic of Quantum Mechanics*, jednak nigdy nie udało mu się rozwiązać stojących przed nim problemów i ostatecznie go nie wygłosił (Rédei, 2009, s. 17–18). Tak więc to *The Logic of Quantum Mechanics* z 1936 r. dała początek rozwojowi logiki kwantowej jako nowej dziedziny na pograniczu matematyki, fizyki i filozofii.

2.1. Sąd eksperymentalny i jego matematyczna reprezentacja

Głównym powodem, dla którego zdaniem Birkhoffa i von Neumanna mechanika kwantowa wydaje się wprowadzać nowe logiczne pojęcia do opisu układów fizycznych, jest to, że w przeciwieństwie do mechaniki klasycznej, w mechanice kwantowej pełny matematyczny opis układu S nie pozwala na przewidzenie wyniku eksperymentu przeprowadzonego na S (Birkhoff, von Neumann, 1975, s. 1). Odpowiada za to zasada nieoznaczoności. Co więcej, okazuje się, że większość par obserwacji jest niekompatybilna i nie może być przeprowadzona równocześnie. Stąd też Birkhoff i von Neumann sądzą, że mechanika kwantowa nie podlega regułom logiki klasycznej, a regułom nowej, postulowanej przez nich logiki kwantowej.

[5] „the relation between the properties of a physical system on the one hand, and the projections on the other, makes possible a sort of logical calculus with these", przeł. E. D.

Autorzy rozpoczynają od określenia, co rozumieją przez sąd eksperymentalny. W tym celu wychodzą od pojęcia obserwacji układu *S*, stwierdzając, że polega ona na zapisaniu odczytów $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pomiarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *n* różnych kompatybilnych ze sobą wielkości fizycznych. Pomiary $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ determinują punkt $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, który leży w podzbiorze $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$-przestrzeni powiązanej z układem *S*. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$-przestrzeń można nazwać „przestrzenią obserwacyjną" układu *S*, a jej podzbiory „sądami eksperymentalnymi" dotyczącymi *S* (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 2). Wydaje się jednak, że „sądami eksperymentalnymi" nazywane są również zdania wyrażające wyniki pomiarów wielkości fizycznych zawarte w określonych podzbiorach przestrzeni obserwacyjnej. Przykładowo jeśli pomiar α_1 bada położenie układu względem osi *x*, λ_1-przestrzeń zawiera możliwe wyniki tego pomiaru (możliwe wartości, jakie może przyjąć zmienna), a podzbiór *s* λ_1-przestrzeni zawiera przedział $0 < x < 5$, to sądem eksperymentalnym jest nazywany zarówno podzbiór *s*, jak i powiązane z nim zdanie o postaci typu „Wynik pomiaru wielkości *x* zawiera się w przedziale $0 < x < 5$ (z prawdopodobieństwem równym 1)"[6].

Następnie Birkhoff i von Neumann określają, czym jest przestrzeń fazowa Σ: jest to przestrzeń wszystkich możliwych stanów, w jakich może znajdować się układ *S*. Oznacza to, że każdy punkt w przestrzeni Σ odpowiada jakiemuś (wyrażonemu liczbowo) stanowi. Punkt ten można w każdej chwili określić przez wykonanie maksymalnych obserwacji na układzie – czyli poprzez wykonanie pomiarów wartości wszystkich (kompatybilnych) wielkości fizycznych opisujących układ. Określony punkt p_0 w chwili t_0 wraz z właściwym prawem propagacji pozwalają na obliczenie dowolnego punktu p_t w chwili *t*. Birkhoff i von Neumann podkreślają, że przestrzeń fazowa to pojęcie wspólne dla mechaniki klasycznej, klasycznej elektrodynamiki, jak i mechaniki kwantowej. W mechanice klasycznej każdy punkt przestrzeni fazowej Σ jest określony przez *n* składowych położenia układu i *n* składowych pędu, a rolę prawa propagacji może pełnić np. prawo powszechnego ciążenia Newtona. W mechanice kwantowej punkty w przestrzeni fazowej Σ odpowiadają funkcjom falowym, Σ jest więc przestrzenią funkcyjną (przestrzenią Hilberta), a prawem propagacji jest równanie Schrödingera.

Powstaje pytanie o to, w jakiej relacji do siebie pozostają przestrzenie obserwacyjna i fazowa. Na gruncie mechaniki klasycznej można zauważyć między nimi analogię, która pozwala na utożsamienie ze sobą sądów eksperymentalnych w przestrzeni obserwacyjnej z podzbiorami przestrzeni fazowej. Poza mechaniką klasyczną analogia ta się jednak załamuje (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 3). Zbiór sądów eksperymentalnych w mechanice klasycznej odpowiada ciału podzbiorów przestrzeni fazowej. Podzbiory te uporządkowane są relacją inkluzji $\subseteq$ i zdefiniowane są na nich działania teoriomnogościowej sumy zbiorów $\cup$, iloczynu $\cap$ i dopełnienia $'$, co stanowi

[6] Jak podkreśla Rédei, Birkhoff i von Neumann nie uwzględniają przypadku zdań, których prawdopodobieństwo jest różne od 0 i 1 (Rédei, 1998, s. 74).

algebrę Boole'a (von Neumann, Birkhoff 1975, s. 4). Można więc powiedzieć, że algebraiczna struktura mechaniki klasycznej odpowiada logice klasycznej (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 207). W mechanice kwantowej jest jednak inaczej, ponieważ przestrzeń fazowa układów kwantowych jest przestrzenią Hilberta.

Przestrzeń Hilberta jest przestrzenią liniową ze zdefiniowanym iloczynem skalarnym, która jest unormowana i zupełna. Przestrzeń Hilberta oznaczamy jako H, a jej wektory jako ψ_i. Wektory reprezentują stany, w których znajdują się układy kwantowe, zwane stanami czystymi. Na wektory stanu działają liniowe hermitowskie operatory O reprezentujące określone wielkości fizyczne układu (obserwable).

Równanie o postaci:

$$O\psi = \lambda\psi,$$

gdzie O jest operatorem, ψ – wektorem, a λ liczbą zespoloną, nazywane jest równaniem własnym operatora O. Operatory hermitowskie w przestrzeni Hilberta mają rzeczywiste wartości własne, a wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są względem siebie ortogonalne (czyli ich iloczyn skalarny wynosi 0). Operatory hermitowskie reprezentują wielkości fizyczne układu. Wartości własne operatorów odpowiadają możliwym do uzyskania w pomiarze wartościom wielkości fizycznych.

By wprowadzić pojęcie matematycznej reprezentacji sądów eksperymentalnych, przyjmijmy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ to pomiary kompatybilnych wielkości fizycznych charakteryzujących układ (a zarazem operatory w przestrzeni fazowej), wyznaczających przestrzeń obserwacyjną; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ to wartości uzyskane w pomiarach (a zarazem wartości własne operatorów); a funkcje własne f_k operatorów stanowią bazę przestrzeni fazowej Σ (i wyznaczają zbiór wzajemnie ortogonalnych domkniętych podprzestrzeni tej przestrzeni), dzięki czemu każdy punkt przestrzeni fazowej można przedstawić jako kombinację liniową tychże funkcji własnych. Birkhoff i von Neumann wprowadzają następującą definicję:

> „Przez »matematyczną reprezentację« podzbioru s dowolnej przestrzeni obserwacyjnej (określonej przez kompatybilne obserwacje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) kwantowomechanicznego układu S będziemy rozumieli zbiór wszystkich punktów f przestrzeni fazowej układu S, które są liniowymi kombinacjami funkcji własnych f_k spełniającymi warunki $\alpha_1 f_k = \lambda_1 f_k, \ldots, \alpha_n f_k = \lambda_n f_k$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in s$"[7] (von Neumann, Birkhoff , 1975, s. 5).

Równania $\alpha_1 f_k = \lambda_1 f_k, \ldots, \alpha_n f_k = \lambda_n f_k$ to równania własne operatorów α_n.

[7] „By the »mathematical representative« of a subset s of any observation-space (determined by compatible observations $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) for a quantum-mechanical system S, will be meant the set of all points f of the phase-space of S, which are linearly determined by proper functions f_k satisfying $\alpha_1 f_k = \lambda_1 f_k, \ldots, \alpha_n f_k = \lambda_n f_k$, where \$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in s$" (przeł. E. D.).

Birkhoff i von Neumann wnioskują stąd, że:

1) matematyczną reprezentacją sądu eksperymentalnego jest domknięta liniowa podprzestrzeń przestrzeni Hilberta,
2) ze względu na to, że operatory są hermitowskie, matematyczną reprezentacją negacji sądu eksperymentalnego jest ortogonalne dopełnienie matematycznej reprezentacji sądu,
3) następujące trzy warunki dotyczące dwóch sądów *x*, *y* są równoważne:
   a) matematyczna reprezentacja sądu *x* jest podzbiorem matematycznej reprezentacji sądu *y*,
   b) *x* implikuje *y* (tzn. zawsze, gdy można z pewnością przewidzieć *x*, można też z pewnością przewidzieć *y*),
   c) dla zespołu statystycznego: prawdopodobieństwo *x* jest nie większe niż prawdopodobieństwo *y* (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 5).

Birkhoff i von Neumann wprowadzają również:

4) jako reprezentację koniunkcji dwóch sądów *x* i *y* teoriomnogościowy iloczyn podprzestrzeni reprezentujących *x* i *y*,
5) jako reprezentację alternatywy dwóch sądów *x* i *y* – supremum podprzestrzeni reprezentujących *x* i *y*, czyli najmniejszą domkniętą podprzestrzeń, która zawiera obie te podprzestrzenie (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 6).

Sąd eksperymentalny reprezentowany jest przez domkniętą liniową podprzestrzeń przestrzeni Hilberta, a nie podzbiór, a alternatywa nie przez teoriomnogościową sumę podprzestrzeni, lecz supremum, z powodu własności przestrzeni liniowych oraz zasady superpozycji (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 208).

Mając zdefiniowane sądy eksperymentalne w mechanice kwantowej, trzy działania na nich oraz relację implikacji, Birkhoff i von Neumann uzyskują algebraiczny rachunek sądów dotyczących układu kwantowego *S*.

2.2. Algebraiczna analiza matematycznej reprezentacji sądu eksperymentalnego

Birkhoff i von Neumann przechodzą następnie do algebraicznej analizy uzyskanej w ten sposób struktury, co pozwala na znalezienie podobieństw i różnic między nią a algebrą Boole'a. Algebra Boole'a nie tylko reprezentuje własności klasycznego rachunku zdań, lecz również, jak wspomniano, przestrzeni fazowej klasycznej dynamiki oraz struktury zdarzeń klasycznego rachunku prawdopodobieństwa. Pytanie wyjściowe logiki kwantowej według pomysłu Birkhoffa i von Neumanna brzmi więc: czy podobne analogie można znaleźć dla pewnej nieboole'owskiej algebry, która wyłania się z formalizmu mechaniki kwantowej? Inaczej mówiąc: czy można „zlogicyzować" nieboole'owską kratę? (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 206).

Birkhoff i von Neumann rozpoczynają analizę od implikacji. Przypominają, że „w dowolnej teorii fizycznej, w której występuje przestrzeń fazowa, sądy eksperymentalne dotyczące układu *S* odpowiadają rodzinie podzbiorów jego przestrzeni fazowej Σ w taki sposób, że »*x* implikuje *y*« (gdzie *x* i *y* to dowolne dwa sądy eksperymentalne) oznacza, że podzbiór zbioru Σ odpowiadający sądowi *x* jest podzbiorem podzbioru odpowiadającego sądowi *y*"[8] (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 6).

Birkhoff i von Neumann stwierdzają, że implikacja materialna spełnia następujące warunki[9]:

S1) *x* implikuje *x*,
S2) jeśli *x* implikuje *y* oraz *y* implikuje *z*, to *x* implikuje *z*,
S3) jeśli *x* implikuje *y* oraz *y* implikuje *x*, to *x* i *y* są logicznie równoważne.

Teoriomnogościowa relacja inkluzji spełnia analogiczne warunki: jest zwrotna (S1), przechodnia (S2), a także antysymetryczna (S3). Relacja taka zwana jest częściowym porządkiem.

Birkhoff i von Neumann postulują, że własności fizyczne układu tworzą zbiór częściowo uporządkowany, gdzie relacją porządkującą jest relacja inkluzji (odpowiadająca implikacji). Z algebry wiadomo, że w zbiorach częściowo uporządkowanych, gdzie *A* to zbiór częściowo uporządkowany relacją porządkującą ⊆ (którą oprócz inkluzji może być też dowolna inna relacja spełniająca warunki S1-S3) i $B \subseteq A$, można zdefiniować:

Definicja 1. Element $a \in A$ taki, że dla każdego $b \in B$ zachodzi $b \subseteq a$, nazywany jest ograniczeniem górnym *B*.

Definicja 2. Element $c \in A$ taki, że *c* jest ograniczeniem górnym *B* oraz $c \subseteq a$ dla dowolnego $a \in A$ będącego ograniczeniem górnym *B* (czyli najmniejsze z ograniczeń górnych *B*), nazywany jest kresem górnym *B* (*supremum*).

Definicja 3. Element $a \in A$ taki, że dla każdego $b \in B$ zachodzi $a \subseteq b$, nazywany jest ograniczeniem dolnym *B*.

Definicja 4. Element $c \in A$ taki, że *c* jest ograniczeniem dolnym *B* oraz $a \subseteq c$ dla dowolnego $a \in A$ będącego ograniczeniem dolnym zbioru *B* (czyli największe z ograniczeń dolnych *B*), nazywany jest kresem dolnym *B* (*infimum*).

---

[8] „...in any physical theory involving a phase-space, the experimental propositions concerning a system *S* correspond to a family of subsets of its phase-space Σ, in such a way that „*x* implies *y*" (*x* and *y* being any two experimental propositions) means that the subset of Σ corresponding to *x* is contained set-theoretically in the subset corresponding to *y*", tłum.E. D.

[9] Oznaczenia S1–S4, D1–D2, L1–L6 i L71–L73 pochodzą z *The Logic of Quantum Mechanics*.

Definicja 5. Element $a \in A$ nazywany jest elementem najmniejszym zbioru A, jeśli dla każdego $b \in A$, $a \subseteq b$.

Istnieje co najwyżej jeden element najmniejszy w dowolnym zbiorze, oznaczany przez 0. (W przypadku przestrzeni fazowej Σ element ten odpowiada zawsze fałszywemu sądowi eksperymentalnemu „układ nie istnieje").

Definicja 6. Element $a \in A$ nazywany jest elementem największym zbioru A, jeśli dla każdego $b \in A$, $b \subseteq a$.

Istnieje co najwyżej jeden element największy w dowolnym zbiorze, oznaczany przez 1. (Ten element przestrzeni fazowej Σ odpowiada zawsze prawdziwemu sądowi eksperymentalnemu „układ istnieje").

Definicja 7. Zbiór A uporządkowany relacją $\subseteq$ jest kratą wtedy i tyko wtedy, gdy każda para elementów a, $b \in A$ ma kres górny (*join*) $a \vee b \in A$ i kres dolny (*meet*) $a \wedge b \in A$ taki, że:

a) $a \wedge b \leq a, b$ oraz $\forall c \in A: a, b \rightarrow c \leq a \wedge b$,

b) $a, b \leq a \vee b$ oraz $\forall c \in A: a, b \leq c \rightarrow a \vee b \leq c$.

W każdej kracie spełnione są następujące zależności:

c) $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$,

d) $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$.

Krata, która zawiera element najmniejszy 0 i największy 1 nazywana jest kratą ograniczoną. Z kolei krata taka, że dla każdego $B \subseteq A$ supremum B i infimum B należy do A nazywana jest kratą zupełną.

Przykładem kraty jest zbiór potęgowy $\wp(A)$ uporządkowany częściowo relacją inkluzji. W takim przypadku dla każdego $B, C \in \wp(A): B \wedge C = B \cap C, B \vee C = B \cup C$, gdzie $\cap$ jest teoriomnogościowym iloczynem zbiorów, a $\cup$ jest teoriomnogościową sumą zbiorów, elementem najmniejszym 0 jest zbiór pusty $\emptyset$, elementem największym 1 jest zbiór A.

W każdej kracie spełnione są warunki:

L1) $a \wedge a = a$ oraz $a \vee a = a$,

L2) $a \wedge b = b \wedge a$ oraz $a \vee b = b \vee a$,

L3) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ oraz $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,

L4) $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a$.

Birkhoff i von Neumann zwracają uwagę, że własności L1-L4 kresu górnego i dolnego w kracie są zarazem własnościami koniunkcji i alternatywy logiki klasycznej (von Neumann, Birkhoff 1975, s. 8), a także teoriomnogościowej sumy i iloczynu zbiorów.

Oprócz tych dwóch działań dwuargumentowych w zbiorach częściowo uporządkowanych można zdefiniować działanie jednoargumentowe zwane ortodopełnieniem.

Definicja 8. Niech A będzie kratą. Ortodopełnienie ' jest to jednoargumentowa operacja taka, że dla każdego a, $b \in A$:

L71) $(a')' = a$,
L72) $a \vee a' = 1$ oraz $a \wedge a' = 0$,
L73) jeśli $a \leq b$ to $b' \leq a'$.

W zbiorze potęgowym ortodopełnienie odpowiada dopełnieniu zbioru. W przypadku domkniętych podprzestrzeni przestrzeni Hilberta, ortodopełnienie podprzestrzeni odpowiada podprzestrzeni do niej ortogonalnej. W przypadku logiki klasycznej ortodopełnienie odpowiada negacji. Krata ograniczona, w której określona jest operacja ortodopełnienia, zwana jest ortokratą.

Algebrę Boole'a charakteryzuje własność zwana dystrybutywnością: dla każdego a, b, $c \in A$:

L6) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$ oraz $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$

Birkhoff i von Neumann pokazują jednak, że to prawo nie obowiązuje w mechanice kwantowej: załóżmy, że zdanie a to sąd eksperymentalny stwierdzający położenie układu w jednej części przestrzeni, zdanie a' to sąd eksperymentalny stwierdzający położenie układu w drugiej części przestrzeni (a' jest negacją a), natomiast b to sąd eksperymentalny stwierdzający posiadanie przez układ fizyczny pewnej wielkości fizycznej komplementarnej z położeniem (np. pędu). Zgodnie z prawem dystrybutywności powinno być prawdą, że $b \wedge (a \vee a') = (b \wedge a) \vee (b \wedge a')$.

Nie możemy jednak tego stwierdzić z powodu z zasady nieoznaczoności Heisenberga. Jeśli przyjmiemy, że zdanie b jest prawdziwe, i zauważymy, że alternatywa $a \vee a'$ jest również prawdziwa, to stojąca po lewej stronie koniunkcja będzie zdaniem prawdziwym. Natomiast prawa strona nie jest prawdziwa, ponieważ nie można równocześnie zaobserwować położenia i pędu układu, więc sądy eksperymentalne stwierdzające wyniki tych pomiarów nie mogą być równocześnie prawdziwe, a skoro żadna ze składowych alternatywy nie będzie prawdziwa, to sama alternatywa będzie również zdaniem fałszywym. (W przypadku wielkości fizycznych innych niż komplementarne to nie zachodzi.) Czyli

$$b \wedge (a \vee a') = b \wedge 1 = b > 0 = (b \wedge a) = b \wedge a' = (b \wedge a) \vee (b \wedge a')$$

(von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 10).

Okazuje się więc, że algebra z działaniami teoriomnogościowych sumy i iloczynu jest dystrybutywna, natomiast z działaniami teoriomnogościowego iloczynu i supremum podprzestrzeni już nie. Tak więc algebra domkniętych podprzestrzeni przestrzeni Hilberta nie jest algebrą Boole'a. Obiekt taki zwany jest obecnie kratą Hilberta (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 209):

Definicja 9. Kratą Hilberta nazywamy kratę: $L(H) = \langle C(H), \subseteq, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$, gdzie:

$C(H)$ jest zbiorem wszystkich podprzestrzeni przestrzeni Hilberta H domkniętych ze względu na tworzenie kombinacji liniowych,

$\subseteq$ jest teoriomnogościową relacją inkluzji,
$\wedge$ jest teoriomnogościowym iloczynem zbiorów,
$\vee$ jest supremum dwóch podprzestrzeni,
$'$ jest ortodopełnieniem,
0 oznacza wektor zerowy, czyli najmniejszą możliwą podprzestrzeń,
1 oznacza całą przestrzeń Hilberta H.

Krata Hilberta jest niedystrybutywną zupełną ortokratą. W ortokratach nie musi obowiązywać rozdzielność alternatywy względem koniunkcji ani koniunkcji względem alternatywy. Może obowiązywać np. jedynie omawiana przez Birkhoffa i von Neumanna słabsza od dystrybutywności własność zwana modularnością:

Definicja 10. Kratę nazywamy modularną wtedy, gdy dla każdego $a, b, c \in A$:

L5) jeśli $a \leq c$ to $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Każda krata rozdzielna jest modularna, ale nie każda krata modularna jest dystrybutywna (von Neumann, Birkhoff 1975, s. 11).

Oprócz modularności bardzo ważny jest jeszcze jeden, niewymieniony w artykule, warunek będący osłabieniem modularności, mianowicie ortomodularność (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 209).

Definicja 11. Kratę nazywamy ortomodularną, gdy dla każdego $a, c \in A$:

OM) jeśli $a \leq c$ to $a \vee (a' \wedge c) = c$.

Każda krata modularna jest ortomodularna, ale nie każda krata ortomodularna jest modularna.

Krata Hilberta jest modularna, gdy przestrzeń Hilberta ma skończoną liczbę wymiarów. Gdy przestrzeń Hilberta jest ∞-wymiarowa, jej krata Hilberta jest jedynie ortomodularna (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 209). Wydawałoby się, że udało się właśnie określić strukturę algebraiczną charakteryzującą rachunek zdań mechaniki kwantowej. Birkhoff i von Neumann jednak nie byli jeszcze zadowoleni.

2.3. Modularność, prawdopodobieństwo i idealna analogia

Warunek modularności ma postać:

L5) jeśli $a \leq c$ to $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Birkhoff i von Neumann zauważają, że modularność można rozumieć na trzy sposoby (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 11):

1) warunek modularności jest ograniczonym prawem łączności na sumach i iloczynach zbiorów; równocześnie jest on osłabieniem dystrybutywności;
2) założenie, że krata jest modularna, jest równoważne stwierdzeniu, że nie posiada podkraty izomorficznej z kratą *N*5 (pięciokątem);
3) można pokazać, że modularność jest konsekwencją istnienia funkcji wymiaru $d(a)$ o własnościach:

D1) jeśli $a > b$, to $d(a) > d(b)$,
D2) $d(a) + d(b) = d(a \cap b) + d(a \cup b)$.

Stwierdzają, że D1 i D2 częściowo opisują formalne własności funkcji prawdopodobieństwa (tym, czego brakuje, jest unormowanie do przedziału wartości [0,1]). Stąd też wiążą spełnianie warunku modularności z istnieniem „funkcji prawdopodobieństwa a priori" (*a priori thermo-dynamic weight of states*). W przypadku logiki kwantowej utożsamiają funkcję wymiaru *d* na kracie modularnej z funkcją prawdopodobieństwa *a priori* (Rédei, 2009, s. 13).

W okresie, gdy powstawało *The Logic of Quantum Mechanics*, von Neumann pracował wraz z Francisem Murrayem nad teorią pierścieni operatorów, zwanych obecnie algebrami von Neumanna.[10] Na algebrach tych zdefiniowali funkcję wymiaru *d* i zaproponowali ich klasyfikację ze względu na wartości, jakie ona przyjmuje. Wyróżnili pięć tzw. typów faktorów: I_n, I_∞, II_1, II_∞, III. *N*-wymiarowa przestrzeń Hilberta jest faktorem typu I_n, a ∞-wymiarowa – typu I_∞. Spośród tych pięciu typów modularne są tylko I_n i II_1. I_∞ jest jedynie ortomodularna. Typu II_1 są m.in. iloczyny tensorowe *n* matryc M2. Jego cechą charakterystyczną jest to, że funkcja *d* przyjmuje wartości ciągłe na przedziale [0,1]. Typy I_n i I_∞ przyjmują wartości dyskretne, odpowiednio na przedziale skończonym i nieskończonym.

Von Neumannowi zależało, żeby logika kwantowa była modularna. Mając więc do wyboru ∞-wymiarowe algebry typu I_∞ i II_1, wybrał II_1, mimo że jej funkcja wymiaru jest ciągła na przedziale [0,1], co jest trudne do interpretacji fizycznej.

[10] Dokładne omówienie klasyfikacji algebr von Neumanna i ewolucji jego poglądów na temat logiki kwantowej znajduje się w (Rédei, 1996; Rédei 1998; Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007; Rédei, 2009).

Modularność jest dla von Neumanna warunkiem istnienia funkcji prawdopodobieństwa *a priori*. Istnienie miary prawdopodobieństwa jest tak istotne, ponieważ von Neumann chciał utworzyć idealną kwantową analogię do sytuacji klasycznej, gdzie algebra Boole'a jest równocześnie modelem logiki klasycznej, struktury zdarzeń klasycznego prawdopodobieństwa, jak i przestrzeni fazowej mechaniki klasycznej (Dalla Chiara, Giuntini, Rédei, 2007, s. 210). Było to dla niego tak ważne, że trudności z tym związane sprawiły, że skłaniał się ku odrzuceniu formalizmu przestrzeni Hilberta, który sam stworzył. Jak pisze w liście do Birkhoffa z 1935 r.:

> ,,Chciałbym przyznać się do czegoś, co może wydać się niemoralne: nie wierzę już absolutnie w przestrzeń Hilberta. [...] Teraz zaczynamy sądzić, że to nie wektory są istotne, ale krata wszystkich liniowych (domkniętych) podprzestrzeni. Ponieważ: 1) Wektory powinny reprezentować fizyczne *stany*, ale robią to redundantnie, jedynie w przybliżeniu do pewnego czynnika, 2) a poza tym, stany są jedynie wtórnym pojęciem, a pojęciem pierwotnym (danym fenomenologicznie) są własności, które odpowiadają *liniowym domkniętym podprzestrzeniom*"[11] (Rédei 1996, s. 493).

W tamtym czasie von Neumann pracował również nad teorią abstrakcyjnych geometrii rzutowych. Zauważył, że algebry typu II_1 są rodzajem abstrakcyjnej geometrii rzutowej (*abstract projective geometry*), które są strukturami ogólniejszymi od nich. Dlatego też Birkhoff i von Neumann skonkludowali na koniec *The logic of quantum mechanics*, że „rachunek zdań mechaniki kwantowej ma taką samą strukturę jak abstrakcyjna geometria rzutowa" (Birkhoff, von Neumann, 1975, s. 12).

To ostatnie odkrycie nie miało jednak dużego znaczenia dla badaczy, którzy przyszli po nich – sukces formalizmu przestrzeni Hilberta był zbyt wielki. Logicy kwantowi przyjęli ideę ,,logicyzacji nieboole'owskiej kraty", jednak kratą tą nie był faktor typu II_1, lecz ortomodularne kraty Hilberta $L(H)$ i izomorficzne do nich kraty projekcji $P(H)$ (Rédei 2009, s. 1).

3. PODSUMOWANIE

Oba projekty, Zawirskiego i Birkhoffa–von Neumanna, można by określić jako dla logiki kwantowej założycielskie: Zawirskiego, ponieważ był chronologicznie pierwszy, a Birkhoffa–von Neumanna, ponieważ większość logików kwantowych kontynuowało zapoczątkowany przez nich nurt badań

[11] „I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space anymore. [...] Now we begin to believe that it is not the *vectors* which matter, but the lattice of all linear (closed) subspaces. Because: 1) The vectors ought to represent the physical *states*, but they do it redundantly, up to a complex factor, only 2) and besides, the states are merely a derived notion, the primitive (phenomenologically given) notion being the qualities which correspond to the *linear closed subspaces*", przeł. E.D.

(Pavičić, 1992; Engesser, Gabbay, Lehman, 2009). Wydaje się jednak, że więcej je dzieli niż łączy: począwszy od punktu wyjścia (u Zawirskiego – zasada komplementarności i analiza sprzecznych zdań takich jak „dany proces jest korpuskularny" i „dany proces jest falowy", u Birkhoffa i von Neumanna – analiza specyfiki przestrzeni obserwacyjnej i fazowej mechaniki kwantowej), przez zastosowane metody (Zawirski – logika wielowartościowa Łukasiewicza, Birkhoff i von Neumann – teoria przestrzeni Hilberta i algebra), aż po wpływ na innych badaczy (Zawirski – niewielki, Birkhoff i von Neumann – relatywnie duży).

Jeśli się jednak im bliżej przyjrzeć, zobaczymy, że oba wyrastają z zafrapowania tymi samymi problemami. Oba lokalizują źródło nieklasyczności logiki mechaniki kwantowej w zasadzie nieoznaczoności Heisenberga, choć akcentują inne jej aspekty i wyciągają z tego faktu inne wnioski – dla Zawirskiego logika kwantowa ma być wielowartościowa, a dla Birkhoffa i von Neumanna – niedystrybutywna. Następnie obaj stwierdzają potrzebę uzgodnienia tych logik z rachunkiem prawdopodobieństwa. Zawirski podejmuje próbę uzgodnienia wzorów na sumę i iloczyn w rachunku prawdopodobieństwa i w logice wielowartościowej, a von Neumann postuluje, że logika kwantowa powinna być nie tyle niedystrybutywna, co modularna, by zapewnić możliwość zdefiniowania miary prawdopodobieństwa.

3.1 Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Zarówno Zawirski, jak i Birkhoff i von Neumann odwołują się do zasady nieoznaczoności w trakcie swoich badań, choć nieco inaczej rozkładają akcenty.

U Zawirskiego zasada nieoznaczoności pojawia się na samym początku, na etapie filozoficznego uzasadnienia podejmowanych badań, i służy jako argument za tym, że logika mechaniki kwantowej jest logiką wielowartościową (nieklasyczną). Zawirski wpierw stwierdza, że podstawowymi problemami współczesnego przyrodoznawstwa, wprowadzonymi przez mechanikę kwantową, są: 1) zasada nieoznaczoności Heisenberga, 2) zasada komplementarności Bohra, 3) pogląd, że wszystkie prawa przyrody, z wyjątkiem co najwyżej takich jak prawo zachowania energii, są „tylko prawdopodobne" (Zawirski, 1931a, s. 40–41). Następnie pisze, że namysł nad zasadą komplementarności doprowadził go do poglądu, że można ją zrozumieć jedynie przy pomocy logiki trójwartościowej Łukasiewicza (Zawirski, 1931b, s. 482). Natomiast o kwestiach 1) i 3) pisze, że wzięte razem skłaniają go one do zastosowania logiki wielowartościowej o liczbie wartości logicznych większej niż trzy, ponieważ jego zdaniem jej miejsce ma być wszędzie tam, gdzie zamiast klasycznych przyczynowych praw mechaniki mamy do czynienia z prawami o charakterze statystycznym, przewidującymi zdarzenia o różnym stopniu prawdopodobieństwa (Zawirski, 1932b, s. 42). Zawirski nie wyjaśnia tutaj wprost, dlaczego tak sądzi. W przypadku problemu 3) wydaje się to dość jasne – sądy kwantowe posiadają wyliczane przez mechanikę kwantową prawdopodobieństwa analogiczne do ułamkowych wartości logicznych w logice wielowartościowej (zwanych przez Zawirskiego stopniami możliwości), co sugeruje możliwość powiązania jednych z drugimi. Co jednak z zasadą nieoznaczoności? Warto zwrócić uwagę, że Zawirski potraktował problemy 1) i 3) razem. Na podstawie wcześniejszych pism Zawirskiego można stwierdzić, że oba one są argumentami przeciwko stosowalności zasady przyczynowości w fizyce (Zawirski, 1930). Zawirski przytoczył powszechne w tamtym czasie sformułowanie zasady przyczynowości: „określony stan obecny układu wyznacza jednoznacznie stan przyszły" (Zawirski, 1930, s. 298). Statystyczny charakter przewidywań mechaniki kwantowej (3) podważa ją z jednej strony – sprawia, że wyznaczany stan układu nie jest jednoznaczny. Zasada nieoznaczoności zaś (1) podważa ją z drugiej – stwierdza, że nie da się w ogóle określić jednoznacznie stanu układu. Wobec fałszywości poprzednika, zasady przyczynowości nie da się w ogóle w fizyce stosować (Zawirski, 1930, s. 299).

Zasada nieoznaczoności jest więc „gwoździem do trumny" zasady przyczynowości w fizyce, a wzięta razem ze statystycznym charakterem mechaniki kwantowej stanowi argument za jej nieklasycznym charakterem. Na podstawie problemów 2) i 3) Zawirski stwierdza, że ta nieklasyczność polega na wielowartościowości. Waga zasady nieoznaczoności jest o tyle wielka, że w przeciwieństwie do statystycznego charakteru mechaniki kwantowej, nie można dla niej znaleźć alternatywnych przyczynowych wyjaśnień (Zawirski, 1930, s. 298). Nieoznaczoność jest nieredukowalna. Skoro tak, logika mechaniki kwantowej musi być nieklasyczna.

W przypadku Birkhoffa i von Neumanna zasada nieoznaczoności pojawia się na późniejszym etapie, ale również służy uzasadnieniu nieklasycznego charakteru logiki mechaniki kwantowej.

Birkhoff i von Neumann jako punkt wyjścia przyjmują obserwację, że „relacja między własnościami układu fizycznego z jednej strony, a projekcjami z drugiej, umożliwia utworzenie przy ich pomocy pewnego rodzaju rachunku logicznego" (von Neumann, 1955, s. 253). Następnie definiują sąd kwantowy, znajdują jego matematyczną reprezentację i badają jej algebraiczne własności. Tam zauważają, że algebraiczna struktura sądów kwantowych jest nieklasyczna, mianowicie niedystrybutywna, a jako argument podają zdanie podpadające pod prawo dystrybutywności, które nie zachowuje prawdziwości z powodu zasady nieoznaczoności (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 10).

Niech zdanie a będzie sądem eksperymentalnym stwierdzającym położenie układu w jednej części przestrzeni, zdanie a' sądem eksperymentalnym stwierdzającym położenie układu w drugiej części przestrzeni (a' jest negacją a), natomiast b – sądem eksperymentalnym stwierdzającym posiadanie przez układ fizyczny pewnej wielkości fizycznej komplementarnej z położeniem (np. pędu w tym samym kierunku). Zgodnie z algebraicznym prawem dystrybutywności powinno być prawdą, że $b \wedge (a \vee a') = (b \wedge a) \vee (b \wedge a')$. Przyglądając się jednak lewej stronie równości zauważymy, że suma $a \vee a'$ jest prawdziwa, zatem jej iloczyn z b będzie równy b. Natomiast po prawej stronie mamy sumę dwóch iloczynów par zdań, które z powodu zasady nieoznaczoności nie są równocześnie mierzalne, a więc nie mogą być równocześnie prawdziwe; oba człony sumy są fałszywe, więc ona sama również jest fałszywa. (W przypadku wielkości fizycznych innych niż komplementarne to nie zachodzi.) Czyli $b \wedge (a \vee a') = b \wedge 1 = b > 0 = (b \wedge a) = (b \wedge a') = (b \wedge a) \vee (b \wedge a')$ (von Neumann, Birkhoff, 1975, s. 10).

Wobec tego logika mechaniki kwantowej jest nieklasyczna – niedystrybutywna.

3.2 Prawdopodobieństwo

W przeciwieństwie do mechaniki klasycznej, przewidywania mechaniki kwantowej mają charakter nieredukowalnie statystyczny – możliwe jest uzyskanie dla danego układu możliwych wyników pomiarów wraz z prawdopodobieństwami ich uzyskania. Wszelkie deterministyczne próby rozszerzenia tej teorii, dążące do eliminacji tej cechy (np. teoria fali pilotującej czy zmienne ukryte), zawiodły.

W kwestii interpretacji rachunku prawdopodobieństwa, Zawirski twierdził, że „podstawy logiczne rachunku prawdopodobieństwa były przedmiotem sporów, dotąd jeszcze nierozstrzygniętych między stanowiskiem subjektywnem (Laplace, Boltzman, Stumpf) a objektywnem (Cournot, Kries). Podczas gdy Laplace twierdził, że rachunek prawdopodobieństwa wyraża tylko naszą niewiedzę i że umysł doskonały, dysponujący »formułką świata«, zupełnieby tego rachunku nie potrzebował, Cournot był zdania przeciwnego" (Zawirski, 1931a, s. 42). Zgodnie ze stanowiskiem obiektywnym, rachunek prawdopodobieństwa jest potrzebny nie z powodu niedoskonałości ludzkiego poznania, lecz dlatego, że wyraża rzeczywiste związki w świecie. Według Zawirskiego „stan współczesnego przyrodoznawstwa (...) przemawia za takiem [obiektywnym – przyp. E.D.] pojmowaniem prawdopodobieństwa" (Zawirski, 1934b, s. 398). Równocześnie także „stanowisko logiki wielowartościowej odpowiada raczej kierunkowi objektywnemu" (Zawirski, 1931a, s. 42). Tak więc zarówno współczesne przyrodoznawstwo, a więc i mechanika kwantowa, jak i logika wielowartościowa, są zgodne z obiektywną interpretacją rachunku prawdopodobieństwa, co stanowi dla Zawirskiego wskazówkę do ich powiązania ze sobą.

Dodatkowo, jak widzieliśmy wyżej, statystyczny charakter przewidywań mechaniki kwantowej był wymieniony przez Zawirskiego jako jeden z problemów współczesnego przyrodoznawstwa. Z jednej strony jest to dla niego argument za porzuceniem klasycznie rozumianej w fizyce zasady przyczynowości (Zawirski, 1932b, s. 42). Z drugiej zaś logika mechaniki kwantowej musi być z rachunkiem prawdopodobieństwa zgodna, jeśli ma uwzględniać jej statystyczny charakter. Jest to więc dodatkowe uzasadnienie dla podejmowania prób uzgodnienia logiki wielowartościowej z rachunkiem prawdopodobieństwa (Zawirski, 1934b).

To uzgodnienie jest możliwe przy przyjęciu Posta interpretacji zdań n-wartościowej logiki jako klas (n-1) zdań logiki dwuwartościowej oraz Reichenbacha metrycznej interpretacji logiki wielowartościowej. Głównym problemem zauważonym przez Zawirskiego jest to, że wzory na sumy i iloczyny prawdopodobieństw nie pokrywają się ze wzorami na koniunkcje i alternatywy zdań logiki wielowartościowej. Rozwiązaniu tego problemu poświęcił pracę *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa* (Zawirski, 1934a).

Von Neumann w czasie pisania *The Logic of Quantum Mechanics* był zwolennikiem obiektywnej, częstościowej interpretacji rachunku prawdopodobieństwa (*frequentist interpretation*), choć pod koniec życia ją porzucił i skłaniał się ku interpretacji logicznej (Rédei, 2009, s. 16). Zgodnie z częstościową interpretacją prawdopodobieństwo zdarzenia jest równe granicy ciągu (przy n dążącym do nieskończoności) jego względnych częstości, które są liczbą wystąpień tego zdarzenia do liczby powtórzeń eksperymentu.

W projekcie tworzenia logiki kwantowej dla von Neumanna istotne było uzyskanie kwantowej analogii sytuacji klasycznej: chciał, żeby uzyskana przez niego nieboole'owska algebra pełniła wobec kwantowej logiki, przestrzeni fazowej i struktury zdarzeń prawdopodobieństwa taką samą rolę, jak algebra Boole'a względem klasycznej logiki, przestrzeni fazowej mechaniki klasycznej i struktury zdarzeń klasycznego prawdopodobieństwa. Zwrócił uwagę, że w kratach modularnych można zdefiniować funkcję wymiaru $d(a)$, której własności częściowo pokrywają się z własnościami funkcji prawdopodobieństwa, i którą utożsamił z funkcją prawdopodobieństwa a priori (Rédei, 2009, s. 13). Stąd też tak silny postulat modularności logiki kwantowej i odrzucenie kraty Hilberta, na której nie da się zdefiniować miary prawdopodobieństwa o odpowiednich własnościach (Rédei, 2009, s. 13), co ostatecznie doprowadziło do zakwestionowania poprawności formalizmu przestrzeni Hilberta w mechanice kwantowej (Rédei, 1996, s. 493) i porzucenia interpretacji częstościowej, przy której niemożliwe było uzyskanie „niekomutatywnych przestrzeni prawdopodobieństwa" (Rédei, 2009, s. 16). Można więc powiedzieć, że idea uzgodnienia logiki kwantowej z kwantowym prawdopodobieństwem była dla von Neumanna przewodnia w realizacji jego projektu logiki kwantowej.

Pomimo głębokich różnic dzielących te dwa projekty, istnieją między nimi pewne podobieństwa. Oba uwzględniały zasadę nieoznaczoności Heisenberga i niekomutatywność pewnych par obserwabli, a także w obu z nich dołożono starań, by logika kwantowa została uzgodniona z rachunkiem prawdopodobieństwa. Być może jest tak, że te dwie kwestie decydują o wyjątkowym, budzącym kontrowersje charakterze mechaniki kwantowej, i każdy przyszły projekt logiki kwantowej będzie musiał je uwzględnić.

BIBLIOGRAFIA

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., *Quantum Logics*, w: Handbook of Philosophical Logic, tom 6, D. M. Gabbay, F. Guenthner (red.), wydanie drugie, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam 2002.

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., Greechie, R., *Reasoning in Quantum Theory. Sharp and Unsharp Quantum Logics*, Springer, Dordrecht 2004.

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., Rédei, M., *The History of Quantum Logics*, w: Handbook of the History of Logic. The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic, tom 8, D. M. Gabbay, J. Woods (red.) Elsevier, Amsterdam 2007.

Garbacz, P., *Próba rekonstrukcji systemu Z i jego podstaw filozoficznych*, Roczniki Filozoficzne, 1997, 45 (1).

Hajduk, Z., *Zarys filozofii nauk formalnych*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2011.

Jammer, M., *The Philosophy of Quantum Mechanics. The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*, John Wiley & Sons, New York 1974.

Kiczuk, S., *Stosowalność logik wielowartościowych w teoriach fizykalnych w ujęciu Z. Zawirskiego*, Studia Philosophiae Christianae, 1974, 10 (2).

_____ , *Zygmunta Zawirskiego koncepcja logiki mechaniki kwantowej*, Roczniki Filozoficzne, 1975, 23(3).

Pabjan, T., *Zasada komplementarności a filozofia*, Postępy fizyki, 2011, 62(1).

Pavičić, M., *Bibliography on Quantum Logics and Related Structures*, International Journal of Theoretical Physics, 1992, 31(3).

Pykacz, J., *Quantum Physics, Fuzzy Sets and Logic. Steps Towards a Many-Valued Interpretation of Quantum Mechanics*, Springer, 2015.

Rédei, M., *Why John von Neumann Did Not Like the Hilbert Space Formalism of Quantum Mechanics (and What He Liked Instead)*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 1996, 27(4).

_____ , *Quantum Logic in Algebraic Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.

_____ , *The Birkhoff-von Neumann Concept of Quantum Logic*, w: K. Engesser, D.M. Gabbay, D. Lehman (red.), Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic, Elsevier, Amsterdam 2009.

Tkaczyk, M., *Między logiką a przyrodoznawstwem*, w: Dydaktyka filozofii, tom VIII Logika, S. Janeczek (red.), cz. II Kultura logiczna, Wydawnictwo KUL, Lublin 2018.

Von Neumann, J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, przeł. R. T. Beyer, Princeton University Press, Princeton 1955.

Von Neumann, J., Birkhoff, G., *The Logic of Quantum Mechanics*, Annals of Mathematics, 1936, 37 (4); przedruk w: *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, tom 1 *The Historical Evolution*, C.A. Hooker (red.), Springer, Dordrecht 1975.

Zawirski, Z., *O szansach indeterminizmu w świetle nauki współczesnej*, Ruch Filozoficzny, 1928–1929, XI, 1–10.

_____ , *Teorja kwantów a zasada przyczynowości*, Przegląd Filozoficzny, 33 (4), 1930.

_____ , *Próby stosowania logiki wielowartościowej do współczesnego przyrodoznawstwa*, Sprawozdania Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, 2, 3, 4, 1931a.

_____ , *W sprawie indeterminizmu fizyki kwantowej,* w: Księga pamiątkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie 12. II. 1904.–12. II. 1929., Polskie Towarzystwo Filozoficzne, Lwów 1931b.

_____ , *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa*, Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, Poznań 1934a.

_____ , *Znaczenie logiki wielowartościowej dla poznania i związek jej z rachunkiem prawdopodobieństwa*, Przegląd Filozoficzny, 37(4), 1934b.

FIRST INSPIRATIONS TO THE REVISION OF CLASSICAL LOGIC ON THE GROUND OF QUANTUUM MECHANICS: ZYGMUNT ZAWIRSKI I JOHN VON NEUMANN

ABSTRACT

Quantum logic emerged in the 1930s as a response to the question of whether the conceptual changes initiated in physics by quantum mechanics required a revision of logic. In the English-language literature, John von Neumann is considered the founder of quantum logic, while the Polish literature points to Zygmunt Zawirski. Zawirski was the first researcher who suggested that quantum mechanics may follow a different logic than classical logic. He was the first researcher in the field of many-valued quantum logic, but his influence ultimately proved to be limited. John von Neumann, on the other hand, along with Garrett Birkhoff, started the now dominant field of algebraic quantum logic. It turns out that despite their differences in assumptions and methods, what they have in common is their commitment to subjecting the design of quantum logic to two requirements - consideration of Heisenberg's indeterminacy principle and reconciliation of the resulting logic with probability calculus.

Keywords: Zygmunt Zawirski, John von Neumann, quantum logic, many-valued logic, philosophy of quantum mechanics.

O AUTORCE — doktorantka, Katolicki Uniwersytet Lubelski, al. Racławickie 14, 20-950 Lublin.

E-mail: ejdrozdowska@gmail.com