PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LX – ZESZYT 3 – 2013

RENATA WRÓBEL-ROTTER

ESTYMOWANE MODELE RÓWNOWAGI OGÓLNEJ I AUTOREGRESJA WEKTOROWA. ASPEKTY TEORETYCZNE[1]

1. WSTĘP

Model ekonometryczny rozważany w pracy powstaje poprzez przyjęcie rozkładu *a priori,* generowanego przez estymowany model równowagi ogólnej, dla wektorowej autoregresji bez restrykcji, prowadząc do klasy hybrydowych wektorowych autoregresji znanych w literaturze pod pojęciem DSGE-VAR (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium Vector AutoRegression*). Łączną one zalety stylizowanych strukturalnych modeli makroekonomicznych z elastycznością wektorowej autoregresji, pozwalając danym empirycznym wybrać stopień w jakim potwierdzają one każde z podejść. Mogą one być wykorzystywane do oceny poprawności specyfikacji konstrukcji wywodzącej się z teorii ekonomii, dopuszczając jednocześnie możliwość uchylenia restrykcji z niej wynikających, które nie pozostają w zgodzie z danymi obserwowanymi. Celem pracy jest kompleksowe omówienie i podsumowanie zagadnień teoretycznych związanym z modelami DSGE-VAR, m.in. szczegółowa prezentacja rozkładów prawdopodobieństwa leżących u podstaw konstrukcji modelu połączonego, omówienie roli parametru wagowego i detali związanych z konstrukcją rozkładu a priori, w tym wyprowadzenie kompletnych formuł na momenty teoretyczne zmiennych stanu, oraz prezentacja kolejnych etapów budowy modelu. Praca ma charakter teoretyczny i jest autorską syntezą informacji związanych z metodologią DSGE-VAR. Wypełnia ona lukę w literaturze polskiej przedstawiając całościowe ujęcie modelu i może stanowić użyteczne wprowadzenie do badań empirycznych.

[1] Praca wykonana w ramach badań statutowych Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie. Autorka pragnie złożyć podziękowania Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu oraz uczestnikom seminarium Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych za komentarze i dyskusję podczas prezentacji opracowania.

2. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA

Metodologia pozwalająca na połączenie wnioskowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej z modelami wektorowej autoregresji została zaproponowana w pracy Del Negro i Schorfheide (2004) i następnie rozwinięta przez Del Negro i in. (2007). Określa ona klasę hybrydowych modeli wektorowej autoregresji (DSGE-VAR), które powstały w wyniku poszukiwania metod uwzględniania w modelach wektorowej autoregresji informacji wstępnych, mających za zadanie ich powiązanie z teorią ekonomii i poprawienie ich własności. Pierwotnie prace te koncentrowały się na zastosowaniu modeli strukturalnych, podbudowanych teorią ekonomii, do konstrukcji rozkładów *a priori* dla wektorowej autoregresji (por. np. Ingram i Whiteman, 1994), bądź do porównań własności statystycznych makroekonomicznych szeregów czasowych (por. np. DeJong i in., 1996). Modele teoretyczne dostarczały porównywalnego rozkładu *a priori*, ocenianego w kategoriach zdolności prognostycznej uzyskanej postaci hybrydowej, jak metodologia, w której zmienne wektorowej autoregresji są traktowane *a priori* jako grupa niezależnych procesów błądzenia losowego, zaproponowana w pracy Doana i in. (1983) i Littermana (1986). Pierwszy tego typu model, estymowany metodą największej wiarygodności, powstał po zdefiniowaniu procesu autoregresyjnego dla wektora zakłóceń losowych w równaniu obserwacji, reprezentacji modelu równowagi ogólnej w przestrzeni stanów, i został zaproponowany w pracy Irelanda (2004). Dalszy rozwój metodologii polegał na konstrukcji rozkładów prawdopodobieństwa, które w sposób formalny łączyły wnioskowanie na podstawie wektorowej autoregresji z modelami posiadającymi uzasadnienie w teorii ekonomii. Techniki te pozwoliły na opracowane metod formalnego wnioskowania o parametrach modelu równowagi ogólnej na podstawie wektorowej autoregresji w modelu połączonym (por. np. Del Negro i Schorfheide, 2004; Del Negro i in., 2007). Z obecnie opracowanych zastosowań można wymienić prace m.in. Lee i in. (2007), Liu i Gupty (2008), Watanabe (2007), Chowa i McNelisa (2010), Adolfsona i in. (2008), Kolasy i in. (2012) i Brzoza-Brzeziny i Kolasy (2012). Niniejsza praca jest poświęcona szczegółowemu i kompleksowemu omówieniu metodologii DSGE-VAR, która jest niezbędna do prezentacji zagadnień empirycznych, zawartych w opracowaniu: Wróbel-Rotter (2013b). Obydwie prace stanowią kontynuację badań związanych ze stosowaniem estymowanych modeli równowagi ogólnej (DSGE) w praktyce, w ramach których szczegółowo omówiono podstawy teoretyczne wraz z wyprowadzeniem równań strukturalnych: Wróbel-Rotter (2011a), (2011c), (2012b), sposoby doboru rozkładu a priori dla wag i parametru wagowego wraz z omówieniem ich wpływu na funkcje odpowiedzi impulsowych: Wróbel-Rotter (2013c), (2013d) oraz aspekty estymacyjne i numeryczne: Wróbel-Rotter (2011b), (2012a), (2013a). Badanie te poprzedza ogólna charakterystyka estymowanych modeli równowagi ogólnej, zawarta w pracach Wróbel-Rotter (2012c), (2012d) oraz we wcześniejszych: Wróbel-Rotter (2007c), (2007a), (2007b), (2008).

Model DSGE-VAR składa się z pomocniczego modelu wektorowej autoregresji, służącego aproksymacji rozwiązania zlinearyzowanego modelu równowagi ogólnej i konstrukcji rozkładu *a priori*, oraz zasadniczego modelu wektorowej autoregresji, szacowanego na danych rzeczywistych. Może on być interpretowany jako identyfikowalny model wektorowej autoregresji (ang. *identified* VAR), nie zaś jako forma zredukowana modelu strukturalnego (por. np. An i Schorfheide, 2007). Modele DSGE-VAR dostarczają narzędzia służącego odpowiedzi na pytanie w jakim stopniu dane empiryczne potwierdzają hipotezy wnoszone przez model równowagi ogólnej a w jakim są one lepiej opisywane przez model wektorowej autoregresji bez ograniczeń. Stosowanie modelu strukturalnego jako punktu odniesienia dla procesów wektorowej autoregresji zakłada, że teoria ekonomii, ujęta poprzez stylizowane zależności zdefiniowane w teoretycznej gospodarce, nadaje się do jej uwzględnienia do opisu danych rzeczywistych. Model DSGE-VAR można postrzegać jako sposób na poprawienie własności wektorowej autoregresji, poprzez uwzględnienie informacji wstępnej, wynikającej z teorii ekonomii, bądź też jako technikę umożliwiającą złagodzenie restrykcji obecnych w modelu równowagi ogólnej i ocenę poprawności jego specyfikacji. Budowa modelu DSGE-VAR jest procesem hierarchicznym, zaczynającym się od specyfikacji rozkładu *a priori* dla wektora parametrów modelu równowagi ogólnej, warunkowo względem którego definiuje się rozkład *a priori* dla współczynników wektorowej autoregresji. Umożliwia to, po uwzględnieniu funkcji wiarygodności, wnioskowanie *a posteriori* zarówno o parametrach modelu strukturalnego jak i współczynnikach wektorowej autoregresji. Koncepcja budowy rozkładu *a priori* bazuje na idei dolosowania danych, które następnie służą estymacji modelu pomocniczego pozwalającego na przekazanie informacji wstępnej; podejście takie stosowali m.in. Sims i Zha (1998). Ma ono również swoje uzasadnienie w pionierskich pracach z zakresu łączenia w modelu statystycznym wiedzy spoza próby i informacji niesionej przez obserwacje oraz metodach ich estymacji, zaproponowane przez Theila i Goldbergera (1961). Koncepcja modeli pomocniczych jest związana również z bayesowskimi metodami wnioskowania nie wprost (ang. *indirect inference*), (por. np. Gallant i McCulloch, 2009).

3. MODEL POŁĄCZONY

Łączne wnioskowanie o współczynnikach i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji: Φ i Σ_u oraz o parametrach θ modelu równowagi ogólnej jest możliwe po zdefiniowaniu modelu połączonego, który jest określony przez model wektorowej autoregresji aproksymujący rozwiązanie zlinearyzowanej postaci modelu strukturalnego oraz wektorową autoregresję bez restrykcji dla danych obserwowalnych. Powstały w ten sposób model połączony wektorowej autoregresji umożliwia, na gruncie metod bayesowskich, jednoczesne wnioskowanie o Φ, Σ_u i θ, przy ustalonym wektorze obserwacji. Łączny rozkład *a priori* dla Φ, Σ_u i θ jest budowany w sposób hierarchiczny, poprzez założenie rozkładu *a priori* dla parametrów modelu równowagi ogólnej, a następnie, warunkowo względem niego, przyjęcie rozkładu *a priori* dla współczynników wektorowej autoregresji:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta) = p(\Phi, \Sigma_u | \theta) p(\theta), \tag{1}$$

gdzie $p(\Phi,\Sigma_u|\theta)$ to rozkład *a priori* współczynników i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji bez restrykcji, warunkowy względem θ, $p(\theta)$ jest brzegowym rozkładem *a priori* dla parametrów modelu równowagi ogólnej, specyfikowanym w sposób standardowy, na podstawie oczekiwań co do jego własności i zakresu możliwych wartości parametrów w danym przypadku empirycznym.

Statystyczny model bayesowski, zdefiniowany poprzez łączny rozkład wektora obserwacji Y, parametrów wektorowej autoregresji i modelu strukturalnego ma postać:

$$p(Y, \Phi, \Sigma_u, \theta) = p(Y | \Phi, \Sigma_u, \theta) p(\Phi, \Sigma_u | \theta) p(\theta), \tag{2}$$

gdzie warunkowa gęstość obserwacji: $p(Y|\Phi,\Sigma_u,\theta) = p(Y|\Phi,\Sigma_u)$ i funkcja wiarygodności: $|(\Phi, \Sigma_u,| Y)$ nie zależą od θ. Łączny rozkład *a posteriori* w modelu hybrydowym współczynników wektorowej autoregresji i parametrów modelu równowagi ogólnej otrzymujemy z wzoru Bayesa:

,
$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta | Y) = \frac{p(Y, \Phi, \Sigma_u, \theta)}{p(Y)}, \tag{3}$$

gdzie *p(Y)* oznacza brzegową gęstość obserwacji, przy czym zachodzą równości:

$$\frac{p(Y, \Phi, \Sigma_u, \theta)}{p(Y)} = \frac{p(Y | \Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u, \theta)}{p(Y)} = \frac{p(Y | \Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u | \theta) p(\theta)}{p(Y)}. \tag{4}$$

Wnioskowania *a posteriori* z modelu hybrydowego, o parametrach wektorowej autoregresji, warunkowo względem parametrów θ modelu strukturalnego, dokonuje się po faktoryzacji łącznego rozkładu *a posteriori*:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta | Y) = p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta) p(\theta | Y), \tag{5}$$

gdzie $p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta)$ jest rozkładem *a posteriori* współczynników i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji, warunkowym względem parametrów modelu równowagi ogólnej, $p(Y|\theta)$ jest brzegowym względem Φ i Σ_u rozkładem *a posteriori* parametrów modelu równowagi ogólnej. Charakterystyki warunkowego rozkładu *a posteriori* $p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta)$ stanowią podstawę do analiz ekonomicznych, uzyskanych z hybrydowego modelu wektorowej autoregresji.

Łączny rozkład *a posteriori* $p(\Phi,\Sigma_u ,\theta|Y)$ może zostać poddany dekompozycji umożliwiającej wnioskowanie o parametrach modelu strukturalnego. Warunkowy rozkład $p(\theta|\Phi, \Sigma_u,Y)$ *a posteriori* parametrów modelu równowagi ogólnej, przy ustalonych Φ i Σ_u uzyskuje się z modelu hybrydowego po zapisaniu:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta|Y) = p(\theta|\Phi,\Sigma_u,Y)p(\Phi,\Sigma_u|Y), \tag{6}$$

gdzie $p(\Phi,\Sigma_u|Y)$ jest rozkładem *a posteriori* współczynników wektorowej autoregresji, brzegowym względem θ, natomiast warunkowy względem Φ i Σ_u rozkład *a posteriori* dla θ nie zależy od wektora obserwacji: $p(\theta|\Phi, \Sigma_u,Y)= p(\theta|\Phi, \Sigma_u)$. Oznacza to, że wnioskowanie, z modelu hybrydowego, o parametrach modelu strukturalnego na podstawie danych rzeczywistych jest możliwe pośrednio, poprzez wnioskowanie o parametrach Φ oraz Σ_u wektorowej autoregresji.

Brzegowy rozkład *a posteriori* $p(\theta|Y)$, wektora parametrów modelu strukturalnego θ, zawierający dostępne po zaobserwowaniu danych Y informacje, jest uzyskiwany na podstawie wzoru Bayesa: $p(\theta|Y) = p(Y|\theta)p(\theta)/p(Y)$, gdzie $p(Y) = \int p(Y|\theta)p(\theta)/d\theta$ jest brzegową, względem wszystkich parametrów modelu hybrydowego, gęstością obserwacji. Gęstość obserwacji w modelu połączonym, warunkowa względem θ i brzegowa względem parametrów Φ i Σ_u, jest dana przez:

$$\begin{aligned} p(Y|\theta) = \frac{p(Y,\theta)}{p(\theta)} &= \frac{\int p(Y|\Phi,\Sigma_u,\theta)p(\Phi,\Sigma_u|\theta)p(\theta)d(\Phi,\Sigma_u)}{p(\theta)} = \\ &= \int p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta)d(\Phi,\Sigma_u) = \frac{p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta)}{p(\Phi,\Sigma_u|Y)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Funkcja gęstości łącznego rozkładu *a posteriori* $p(\theta|Y)$ parametrów modelu strukturalnego jest proporcjonalna do iloczynu gęstości *a priori* $p(\theta)$ i warunkowej gęstości obserwacji $p(Y|\theta)$, traktowanej jako funkcja θ, przy ustalonym Y, i oznaczanej przez $l(\theta|Y)$: $p(\theta|Y) \propto l(\theta|Y)p(\theta)$. Alternatywnie, brzegowy rozkład *a posteriori* $p(\theta|Y)$, warunkowy względem wektora obserwacji Y, dla parametrów modelu równowagi ogólnej, uzyskuje się z łącznego rozkładu *a posteriori*: $p(\Phi,\Sigma_u,\theta|Y)$, współczynników wektorowej autoregresji Φ i Σ_u oraz parametrów θ modelu strukturalnego, poprzez obliczenie całki wielowymiarowej:

$$p(\theta|Y) = \int p(\Phi,\Sigma_u,\theta|Y)d(\Phi,\Sigma_u) = \int p(\theta|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|Y)d(\Phi,\Sigma_u). \tag{8}$$

4. MODEL STRUKTURALNY I WEKTOROWA AUTOREGRESJA

Model wektorowej autoregresji rzędu *p* bez restrykcji (VAR(p)), zapisany dla *n* obserwowanych zmiennych w momencie *t*, ma postać:

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots \Phi_p Y_{t-p} + u_t \,, \qquad u_t \sim N^{(n)}(0, \Sigma_u), \tag{9}$$

gdzie Y_t oznacza kolumnę $(n \times 1)$ zmiennych obserwowalnych, Φ_i dla $i=1,\dots,p$, są macierzami $(n \times n)$ zawierającymi współczynniki wektorowej autoregresji, Φ_0 jest wektorem $(n \times 1)$ wyrazów wolnych, u_t jest wektorem $(n \times 1)$ zakłóceń losowych postaci zredukowanej, $N^{(n)}(0, \Sigma_u)$ oznacza n-wymiarowy rozkład normalny, o wektorze wartości oczekiwanych równym wektorowi zerowemu, $E(u_t) = 0$, i macierzy kowariancji $E(u_t u_t') = \Sigma_u$, o wymiarach $(n \times n)$, U_t i X_t są niezależne, $E(u_t u_{t-j}') = 0$. W zapisie macierzowym otrzymujemy: $Y = X\Phi + U$; gdzie Y jest macierzą $(T \times n)$ składającą się z wierszy Y_t', X oznacza macierz $(T \times (1+np))$ o wierszach $X'_t = [1 \ Y'_{t-1} \ Y'_{t-2} \dots Y'_{t-p}]$, U jest macierzą $(T \times n)$ składającą się z wierszy u'_t, $\Phi = \Phi'_0 \, \Phi'_1 \dots \Phi'_p]'$ jest macierzą $((1+np) \times n)$ współczynników wektorowej autoregresji. Założenie n-wymiarowych rozkładów normalnych dla u_t, oznacza, że przy ustalonym wektorze wartości początkowych $Y_{1-p},\dots,Y_0$, warunkowa gęstość obserwacji ma postać:

$$p(Y|\Phi, \Sigma_u) = (2\pi)^{-nT/2} \det(\Sigma_u)^{-T/2} \exp\{-0.5 tr[\Sigma_u^{-1}(Y - X\Phi)'(Y - X\Phi)]\}, \tag{10}$$

gdzie *tr(.)* to ślad macierzy. Łączny rozkład *a posteriori* otrzymujemy z wzoru Bayesa:

$$p(\Phi, \Sigma_u | Y) = \frac{p(Y|\Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u)}{\int p(Y|\Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u) d(\Phi, \Sigma_u)} \tag{11}$$

gdzie w mianowniku mamy brzegową gęstość obserwacji. Funkcja gęstości rozkładu *a posteriori* $p(\Phi,\Sigma_u|Y)$ jest proporcjonalna do iloczynu funkcji wiarygodności $|(\Phi,\Sigma_u|Y)$, będącej warunkową gęstością obserwacji $p(Y|\Phi,\Sigma_u)$, traktowaną jako funkcja parametrów Φ i Σ_u, oraz funkcji gęstości rozkładu *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u)$ dla macierzy współczynników i macierzy kowariancji:

$$p(\Phi, \Sigma_u | Y) \propto \ell(\Phi, \Sigma_u | Y) p(\Phi, \Sigma_u). \tag{12}$$

Specyfikacja rozkładu *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u) = p(\Phi,\Sigma_u|\theta)$ odgrywająca kluczową rolę we wnioskowaniu na podstawie modelu hybrydowego wektorowej autoregresji, jest oparta na estymowanym modelu równowagi ogólnej (modelu strukturalnym), którego równania są zapisywane w formie reprezentacji w przestrzeni stanów:

$$s_t = As_{t-1} + B\varepsilon_t \text{ oraz } Y_t = F + Cs_t + v_t\,, \tag{13}$$

gdzie s_t oznacza wektor stanu, elementy macierzy A i B są nieliniowymi funkcjami θ, wynikającymi z rozwiązania postaci zlinearyzowanej modelu strukturalnego, v_t jest wektorem zakłóceń losowych w równaniu obserwacji, najczęściej o rozkładzie normalnym, $v_t \sim N^{(n)}(0,\Sigma_v)$, ε_t oznacza wektor innowacji związanych z egzogenicznymi zakłóceniami losowymi występującymi w postaci strukturalnej, $\varepsilon_t \sim N^{(n^*)}(0,\Sigma_\varepsilon)$, F i C oznaczają wektor i macierz znanych stałych bądź parametrów podlegających oszacowaniu, Y_t jest procesem obserwowalnym i kowariancyjnie stacjonarnym, co wynika z konstrukcji modelu.

Model równowagi ogólnej jest tutaj traktowany jako podstawa do konstrukcji rozkładu *a priori*, poprzez który są uwzględniane w wektorowej autoregresji restrykcje, wynikające z przyjętych do jego konstrukcji założeń. Budowa rozkładu *a priori* wykorzystuje formalne wnioskowanie na podstawie pomocniczego modelu wektorowej autoregresji, przybliżającego model strukturalny. Aproksymacja rozwiązania liniowej postaci modelu równowagi ogólnej wektorową autoregresją jest związana z wyznaczeniem szeregu restrykcji, wiążących jej współczynniki, wynikających z postaci modelu strukturalnego. Możliwym sposobem transformacji rozwiązania zlinearyzowanej postaci modelu strukturalnego w formę modelu wektorowej autoregresji jest rozpatrzenie odwzorowania wektora parametrów θ w macierz współczynników $\widetilde{\Phi}$ i macierz kowariancji $\widetilde{\Sigma}_u$ dla pomocniczej autoregresji:

$$\widetilde{Y} = \widetilde{X}\widetilde{\Phi} + \widetilde{U}, \tag{14}$$

która dla jednej obserwacji wektorowej ma postać:

$$\widetilde{Y}_t = \widetilde{\Phi}_0 + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{\Phi}_i \widetilde{Y}_{t-i} + \widetilde{u}_t = \widetilde{\Phi}' \widetilde{X}_t + \widetilde{u}_t, \quad t = 1,\ldots,\widetilde{T}\,, \quad \widetilde{u}_t \sim iidN^{(n)}(0,\widetilde{\Sigma}_u)\,, \tag{15}$$

gdzie $\tilde{Y}_t$ jest wektorem *(n×1)* zawierającym zmienne obserwowalne, które odpowiadają zmiennym endogenicznym modelu równowagi ogólnej przyjętym do jego estymacji w równaniu obserwacji, macierz $\tilde{Y}$, o wymiarach *($\widetilde{T}$ ×n)*, składa się z wierszy $\tilde{Y}_t'$, $\widetilde{T}$ oznacza liczebność teoretycznej próby, $\widetilde{\Phi}' = [\widetilde{\Phi}_0' \ \widetilde{\Phi}_1' \ldots \widetilde{\Phi}_p']$, $\widetilde{\Phi}$ jest macierzą *((1+np)×n)* współczynników autoregresji, $\widetilde{X}$ oznacza macierz *($\widetilde{T}$ ×(1+np))* o wierszach $\widetilde{X}_t' = [1 \ \widetilde{Y}_{t-1}' \ \widetilde{Y}_{t-2}' \ldots \widetilde{Y}_{t-p}']$, $\widetilde{X}_t$, $\widetilde{X}_t$ jest wektorem *((1+np)×1)*, $\tilde{U}$ jest macierzą *($\widetilde{T}$ ×ũn)* składającą się z wierszy $\tilde{u}_t'$, zaś $\tilde{u}_t$ jest wektorem *(n×1)* zakłóceń losowych o rozkładzie normalnym, z zerowym wektorem wartości oczekiwanych i macierzą kowariancji $\widetilde{\Sigma}_u$. Funkcja wiarygodności w tym przypadku ma standardową postać:

$$\begin{aligned}\ell(\widetilde{\Phi},\widetilde{\Sigma}_u|\widetilde{Y}) &= (2\pi)^{-n\widetilde{T}/2}\det(\widetilde{\Sigma}_u)^{-\widetilde{T}/2}\exp\{-0.5tr[\widetilde{\Sigma}_u^{-1}(\widetilde{Y}-\widetilde{X}\widetilde{\Phi})'(\widetilde{Y}-\widetilde{X}\widetilde{\Phi})]\} = \\ &= (2\pi)^{-n\widetilde{T}/2}\det(\widetilde{\Sigma}_u)^{-\widetilde{T}/2}\exp\{-0.5tr[\widetilde{\Sigma}_u^{-1}(\widetilde{Y}'\widetilde{Y}-(\widetilde{X}\widetilde{\Phi})'\widetilde{Y}-\widetilde{Y}'\widetilde{X}\widetilde{\Phi}+(\widetilde{X}\widetilde{\Phi})'\widetilde{X}\widetilde{\Phi}]\}.\end{aligned} \tag{16}$$

Odwzorowanie parametrów strukturalnych θ w macierze $\widetilde{\Phi}$ i $\widetilde{\Sigma}_u$ uzyskuje się poprzez formalne wnioskowanie (ang. *population regression*) z wykorzystaniem teoretycznych momentów pierwszego i drugiego rzędu zmiennych $\widetilde{Y}_t$ i $\widetilde{X}_t$. Są one bezpośrednio zależne od parametrów modelu równowagi ogólnej i wyrażają się wartościami oczekiwanymi $E_\theta(.)$, wyznaczanymi względem rozkładu prawdopodobieństwa θ: $\Gamma^*_{xx}(\theta) = E_\theta(\widetilde{X}_t\widetilde{X}_t')$, $\Gamma^*_{xy}(\theta) = E_\theta(\widetilde{X}_t\widetilde{Y}_t')$, $\Gamma^*_{yy}(\theta) = E_\theta(\widetilde{Y}_t\widetilde{Y}_t')$ i $\Gamma^*_{yx}(\theta) = \Gamma^*_{xy}{}'(\theta)$. Funkcja wiarygodności zapisana dla przeskalowanych momentów teoretycznych, zamiast momentów empirycznych $\widetilde{Y}_t$ i $\widetilde{X}_t$:

$$\ell^*(\Phi,\Sigma_u|\widetilde{Y}) \propto \det(\Sigma_u)^{-n\widetilde{T}/2}\exp\{-0.5tr[\widetilde{T}\widetilde{\Sigma}_u^{-1}(\Gamma^*_{yy}(\theta)-\widetilde{\Phi}'\Gamma^*_{xy}(\theta)-\Gamma^*_{yx}(\theta)\widetilde{\Phi}+\widetilde{\Phi}'\Gamma^*_{xx}(\theta)\widetilde{\Phi}]\}, \tag{17}$$

prowadzi, przy założeniu *a priori* nieinformacyjnego rozkładu Jeffreysa dla macierzy współczynników $\widetilde{\Phi}$ i macierzy kowariancji $\widetilde{\Sigma}_u$: $p(\widetilde{\Phi},\widetilde{\Sigma}_u) \propto \det(\widetilde{\Sigma}_u)^{-(n+1)/2}$ do gęstości łącznego rozkładu *a posteriori*:

$$p(\widetilde{\Phi},\widetilde{\Sigma}_u|\theta) \propto \det(\widetilde{\Sigma}_u)^{-(\widetilde{T}+n+1)/2}\exp\{-0.5tr[\widetilde{T}\ \widetilde{\Sigma}_u^{-1}(\Gamma^*_{yy}(\theta)-\widetilde{\Phi}'\Gamma^*_{xy}(\theta)-\Gamma^*_{yx}(\theta)\widetilde{\Phi}+\widetilde{\Phi}'\Gamma^*_{xx}(\theta)\widetilde{\Phi})]\}, \tag{18}$$

która jest przyjmowana w miejsce gęstosci *a priori* współczynników hybrydowej wektorowej autoregresji: $p(\Phi,\Sigma_u|\theta) = p(\widetilde{\Phi},\widetilde{\Sigma}_u|\theta)$. Brzegowy rozkład *a posteriori* macierzy kowariancji $\widetilde{\Sigma}_u$, przy danym θ, posiada formę odwróconego rozkładu Wisharta, (por. np. Zellner, 1971):

$$p(\widetilde{\Sigma}_u|\theta) = f_{IW}(\widetilde{\Sigma}_u|\widetilde{T}\hat{\widetilde{\Sigma}}_u(\theta),\widetilde{T}-(1+np),n), \tag{19}$$

natomiast warunkowy względem $\widetilde{\Sigma}_u$ i θ rozkład *a posteriori* dla współczynników autoregresji $\widetilde{\Phi}$, ma postać rozkładu macierzowego normalnego:

$$p(\widetilde{\Phi}|\widetilde{\Sigma}_u,\theta) = f_{MN}^{(1+np)\times n}(\widetilde{\Phi}|\,\hat{\widetilde{\Phi}}(\theta), \widetilde{T}\Gamma_{xx}^{*}(\theta), (\widetilde{\Sigma}_u)^{-1}), \tag{20}$$

bądź w zapisie dla wielowymiarowego rozkładu normalnego (por. np. Poirier, 1995):

$$p(vec(\widetilde{\Phi})|\widetilde{\Sigma}_u, Y) = f_N^{(1+np)n}(vec(\widetilde{\Phi})|vec(\hat{\widetilde{\Phi}}), \widetilde{\Sigma}_u \otimes [\widetilde{T}\Gamma_{xx}^{*}(\theta)]^{-1})\,], \tag{21}$$

gdzie $\otimes$ to iloczyn Kroneckera, zaś *vec(.)* wektoryzację macierzy. Macierze parametrów:

$$\hat{\widetilde{\Phi}}(\theta) = [\Gamma_{xx}^{*}(\theta)]^{-1}\Gamma_{xy}^{*}(\theta) \quad \text{i} \quad \hat{\widetilde{\Sigma}}_u(\theta) = \Gamma_{yy}^{*}(\theta) - \Gamma_{yx}^{*}(\theta)[\Gamma_{xx}^{*}(\theta)]^{-1}\Gamma_{xy}^{*}(\theta), \tag{22}$$

są estymatorami największej wiarygodności i najmniejszych kwadratów macierzy współczynników $\widetilde{\Phi}$ i macierzy kowariancji $\widetilde{\Sigma}_u$. Macierz $\Gamma_{xx}^{*}(\theta)$ jest odwracalna, jeśli w modelu równowagi ogólnej liczba zakłóceń występujących w postaci strukturalnej jest równa liczbie *n* obserwowanych szeregów czasowych w równaniu obserwacji (por. np. Del Negro i Schorfheide, 2004). Macierze $\hat{\widetilde{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\widetilde{\Sigma}}_u(\theta)$ zywane są funkcjami ograniczeń (ang. *restriction function*), które nałożone na parametry wektorowej autoregresji bez restrykcji powodują, że naśladuje ona model równowagi ogólnej, stając się jego aproksymacją i tworząc model wektorowej autoregresji z ograniczeniami.

5. ROLA PARAMETRU WAGOWEGO

Model hybrydowej wektorowej autoregresji, w najprostszym przypadku, mógłby zostać zbudowany poprzez zastąpienie parametrów wektorowej autoregresji bez ograniczeń: Φ i Σ_u, estymatorami: $\hat{\widetilde{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\widetilde{\Sigma}}_u(\theta)$, będącymi funkcją parametrów θ modelu równowagi ogólnej, i zdefiniowanie dla nich rozkładu *a priori*. Byłoby to możliwe, ponieważ funkcja wiarygodności $\ell(\Phi,\Sigma_u|Y)$, przy założeniu normalności rozkładu warunkowej gęstości obserwacji Y, zależy wyłącznie od jej parametrów Φ oraz Σ_u. Otrzymalibyśmy w ten sposób wektorową autoregresję, w której wnioskowanie *a posteriori* sprowadzałoby się do wnioskowania o parametrach modelu strukturalnego, pośrednio poprzez model autoregresji:

$$p(\theta|Y) \propto \ell(\hat{\widetilde{\Phi}}(\theta), \hat{\widetilde{\Sigma}}_u(\theta)|Y)\,p(\hat{\widetilde{\Phi}}(\theta), \hat{\widetilde{\Sigma}}_u(\theta)), \tag{23}$$

gdzie funkcja wiarygodności $\ell(\hat{\hat{\Phi}}(\theta), \hat{\hat{\Sigma}}_u(\theta)|Y)$ byłaby zależnością wyłącznie od parametrów modelu strukturalnego, zaś rozkład *a priori* $p(\hat{\hat{\Phi}}(\theta), \hat{\hat{\Sigma}}_u(\theta))$, byłby funkcją rozkładu *a priori* dla θ. Procedura taka oznaczałaby przyjęcie założenia, że model równowagi ogólnej jest poprawnie wyspecyfikowany a jedynie nieznane pozostają wartości parametrów θ.

Estymowane modele równowagi ogólnej zazwyczaj nie w pełni poprawnie opisują analizowane zjawisko, co powoduje nieadekwatność powyższego schematu wnioskowania i konieczność jego modyfikacji w kierunku dopuszczenia możliwości wystąpienia błędu specyfikacji. Łączny rozkład *a priori* parametrów wektorowej autoregresji $p(\Phi,\Sigma_u)$ rozważa się warunkowo względem parametrów modelu strukturalnego $p(\Phi,\Sigma_u|\theta)$, ustalając jego wartości oczekiwane w punktach $\hat{\hat{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\hat{\Sigma}}_u(\theta)$ oraz definiując dodatkowy parametr λ określający jego rozproszenie. Oznacza to, że rozkład *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u)$, rozważony warunkowo względem θ i λ: $p(\Phi,\Sigma_u|\theta, \lambda)$, jest scentrowany w punktach odpowiadających funkcjom restrykcji z modelu równowagi ogólnej, $\hat{\hat{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\hat{\Sigma}}_u(\theta)$. Symptomem niepoprawnej specyfikacji modelu równowagi ogólnej są, w tym kontekście, odchylenia parametrów wektorowej autoregresji bez ograniczeń Φ i Σ_u od parametrów wektorowej autoregresji z restrykcjami $\hat{\hat{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\hat{\Sigma}}_u(\theta)$; niewystępowanie takich odchyleń sugeruje poprawną specyfikację modelu równowagi ogólnej.

Zdefiniowanie hiperparametru λ prowadzi, w przypadku ciągłym, do continuum, modeli hybrydowych, których własności określa zakres możliwych jego wartości. Dolna granica dla λ, powiązana z liczbą n obserwowanych szeregów czasowych i z rzędem p opóźnienia w wektorowej autoregresji, wynika z warunku istnienia rozkładu *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u|\theta, \lambda)$ i jest ustalana na poziomie $(n+ k^*)/T$ gdzie k^* oznacza rząd macierzy $\widetilde{X}$. Ogólna interpretacja wskazuje, że wartości λ bliskie dolnej granicy oznaczają, że rozkład *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u|\theta, \lambda)$ jest znacznie rozproszony i do modelu hybrydowego jest wnoszona nikła informacja *a priori* o Φ i Σ_u, pochodząca z modelu równowagi ogólnej, co oznacza że posiada on własności bliskie wektorowej autoregresji bez restrykcji. Z drugiej strony, graniczny przypadek, kiedy $\lambda\to\infty$, wskazuje, że rozkład $p(\Phi,\Sigma_u|\theta, \lambda)$ zmierza do rozkładu jednopunktowego w modalnej $\hat{\hat{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\hat{\Sigma}}_u(\theta)$, a model hybrydowy naśladuje model równowagi ogólnej.

Zdefiniowanie parametru określającego rozproszenie rozkładu *a priori* parametrów wektorowej autoregresji wskazuje, że warunkowo względem λ, wnioskowanie *a posteriori* w modelu hybrydowym przebiega w sposób standardowy. Łączny rozkład *a priori* parametrów modelu równowagi ogólnej i wektorowej autoregresji ma strukturę hierarchiczną:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta|\lambda) = p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)p(\theta)\,, \tag{24}$$

i po uwzględnieniu warunkowej gęstości obserwacji, $p(Y|\Phi,\Sigma_u)$, prowadzi do łącznego rozkładu obserwacji i parametrów modelu hybrydowego, warunkowo względem λ:

$$p(Y,\Phi,\Sigma_u,\theta|\lambda) = p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)p(\theta), \tag{25}$$

gdzie warunkowa gęstość obserwacji: $p(Y|\Phi,\Sigma_u)$ nie zależy od θ i λ. Łączny rozkład *a posteriori*, przy ustalonym λ, jest dany przez:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta|Y,\lambda) = \frac{p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)p(\theta)}{p(Y|\lambda)}\,. \tag{26}$$

Na podstawie jego dekompozycji otrzymujemy warunkowy rozkład *a posteriori* współczynników hybrydowej autoregresji i brzegowy dla θ:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta|Y,\lambda) = p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta,\lambda)p(\theta|Y,\lambda)\,, \tag{27}$$

gdzie warunkowy rozkład *a posteriori* parametrów autoregresji $p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta,\lambda)$ jest wyznaczany ze wzoru Bayesa, na podstawie formalnego wnioskowania w modelu wektorowej autoregresji, warunkowo względem parametrów modelu równowagi ogólnej i λ:

$$p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta,\lambda) = \frac{p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)}{\int p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)d(\Phi,\Sigma_u)}\,. \tag{28}$$

Optymalna wartości parametru rozproszenia λ jest ustalana na podstawie kryterium maksymalizacji brzegowej gęstości obserwacji:

$$\begin{aligned} p(Y|\lambda) &= \int\int p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)p(\theta)d(\Phi,\Sigma_u)d\theta = \\ &= \int p(\theta)\int p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)d(\Phi,\Sigma_u)\,d\theta = \int p(\theta)p(Y|\theta,\lambda)d\theta \end{aligned} \tag{29}$$

traktowanej jako ogólna miara dopasowania modelu do danych. Całkowania w funkcji brzegowej gęstości obserwacji $p(\mathrm{Y}|\lambda)$ względem Φ i Σ_u, przy ustalonym λ i wektorze θ, mogą zostać wykonane analitycznie, jeśli rozkład *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u\theta, \lambda)$ przyjmie się z naturalnej rodziny sprzężonej do rozkładu normalnego dla $p(\mathrm{Y}|\Phi,\Sigma_u)$, natomiast jedynie ostatnia całka, po elementach wektora θ, jest obliczana numerycznie.

W modelu hybrydowym możliwe jest potraktowanie λ jako dodatkowego parametru, podlegającego estymacji po przyjęciu dla niego rozkładu *a priori*, w szczególności rozkładu jednostajnego na ustalonym arbitralnie przedziale, (zob. Adjemian i in., 2008). Łączny rozkład *a priori* wszystkich parametrów modelu hybrydowego ma wtedy postać:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta,\lambda) = p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)\,p(\theta)\,p(\lambda)\,, \tag{30}$$

gdzie zmienne losowe θ i λ są niezależne. Łączny rozkład obserwacji, parametrów modelu hybrydowego i parametru wagowego jest wtedy określony przez:

$$p(Y,\Phi,\Sigma_u,\theta,\lambda) = p(Y|\Phi,\Sigma_u)\,p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)\,p(\theta)\,p(\lambda)\,, \tag{31}$$

z którego uzyskujemy łączny rozkład *a posteriori*:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta,\lambda|Y) = \frac{p(Y|\Phi,\Sigma_u)\,p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)\,p(\theta)\,p(\lambda)}{p(Y)}\,, \tag{32}$$

gdzie *p(Y)* jest brzegową gęstością obserwacji, wyrażoną całką:

$$\begin{aligned} p(Y) &= \int\int\int p(Y|\Phi,\Sigma_u)\,p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)\,p(\theta)\,p(\lambda)\,d(\Phi,\Sigma_u)\,d\theta d\lambda = \\ &= \int p(\lambda)\int p(\theta)\int p(Y|\Phi,\Sigma_u)\,p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)\,d(\Phi,\Sigma_u)\;d\theta d\lambda = \\ &= \int p(\lambda)\int p(\theta)\,p(Y|\theta,\lambda)\,d\theta d\lambda\,, \end{aligned} \tag{33}$$

natomiast brzegowy rozkład *a posteriori* dla λ jest otrzymywany z łącznego rozkładu *a posteriori* po zapisaniu:

$$p(\lambda|Y) = \int p(\Phi,\Sigma_u,\theta,\lambda|Y)d(\Phi,\Sigma_u,\theta) = \\ = \int p(\lambda|Y,\Phi,\Sigma_u,\theta)p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta)p(\theta|Y)d(\Phi,\Sigma_u,\theta). \quad (34)$$

Łączny rozkład *a posteriori* można poddać dekompozycji na warunkowy rozkład *a posteriori* współczynników hybrydowej autoregresji i brzegowy dla θ i λ:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta,\lambda|Y) = p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta,\lambda)p(\theta,\lambda|Y), \quad (35)$$

gdzie warunkowy rozkład *a posteriori* parametrów autoregresji $p(\Phi,\Sigma_u|\mathrm{Y},\theta,\lambda)$ wyraża się standardową gęstością prawdopodobieństwa, natomiast brzegowy rozkład parametrów modelu strukturalnego i parametru wagowego $p(\theta,\lambda|\mathrm{Y})$, jest przybliżany numerycznie, z zastosowaniem algorytmu Metropolisa i Hastingsa (zob. Adjemian i in., 2008).

Przypadek $\lambda=0$ implikuje, że w modelu hybrydowym parametry modelu równowagi ogólnej i wektorowej autoregresji są *a priori* niezależne:

$$p(\Phi,\Sigma_u,\theta|\lambda) = p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)p(\theta) = p(\Phi,\Sigma_u)p(\theta), \quad (36)$$

skąd łączny rozkład *a posteriori* ma postać: $p(Y,\Phi,\Sigma_u,\theta) = \ell(\Phi,\Sigma_u|Y)p(\Phi,\Sigma_u)p(\theta)$.

Funkcja wiarygodności $\ell(\Phi,\Sigma_u|Y)$ nie zależy od wektora parametrów modelu strukturalnego, co oznacza że rozkład *a priori* $p(\theta)$ nie jest uaktualniany przez obserwacje i dane empiryczne nie dostarczają informacji o θ. W konsekwencji rozkład *a posteriori* parametrów modelu równowagi ogólnej, uzyskany na podstawie modelu hybrydowego, jest tożsamy z rozkładem *a priori*. Przyjęcie $\lambda>0$ implikuje zależność *a priori* Φ, Σ_u i θ, umożliwiając jednocześnie uwzględnienie informacji z modelu strukturalnego w modelu hybrydowym oraz wnioskowanie na jego podstawie o θ. W modelu hybrydowym ograniczenie nakładane na parametr wagowy: $\lambda>(n+k^*)/T$, oznacza że w granicznym przypadku wiedza wstępna pochodząca z modelu równowagi ogólnej jest uwzględniana w znikomym stopniu, jednak wystarczającym do przeprowadzenia formalnego wnioskowania o parametrach modelu równowagi ogólnej.

6. KONSTRUKCJA ROZKŁADU *A PRIORI*

Specyfikacja warunkowego, względem parametrów modelu strukturalnego i przy ustalonym parametrze λ, rozkładu *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u|\theta, \lambda)$ współczynników wektorowej autoregresji bez restrykcji, wykorzystuje formalne wnioskowanie statystyczne, które wywodzi się z koncepcji dolosowania danych. Rozważamy pomocniczy model wektorowej autoregresji: $Y^* = X^*\Phi + U^*$, gdzie Y^* jest macierzą $(T^*\times n)$, X^* to macierz $(T^*\times(1+np))$, U^* jest macierzą $(T^*\times n)$ o wierszach $u_t^{*}{}'$, $u_t^* \sim iidN^{(n)}(0,\Sigma_u)$ rozważamy jego estymację na podstawie próbki danych symulacyjnych, pochodzących z liniowego rozwiązania modelu równowagi ogólnej. Skalar λ, opisujący rozproszenie rozkładu *a priori* z modelu strukturalnego, określa liczebność danych sztucznych T^* względem danych rzeczywistych, $\lambda=T^*/T$, która odzwierciedla wagę poszczególnych modeli we wnioskowaniu na podstawie modelu hybrydowego $W = T^*/(T + T^*) = \lambda/(1 + \lambda)$. Łączny rozkład *a posteriori* współczynników i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji szacowanej na danych sztucznych, przy założeniu dla nich *a priori* rozkładu Jeffreysa: $p(\Phi,\Sigma_u) \propto \det(\Sigma_u)^{-(n+1)/2}$, ma postać rozkładu macierzowego normalnego – odwróconego Wisharta:

$$p(\Phi,\Sigma_u \big| Y^*,\lambda) = f_{MNIW}(\Phi,\Sigma_u \big| \ \hat{\Phi}^*,(X^{*}{}'X^*),(\hat{\Sigma}_u^*)^{-1},\lambda T-(1+np)), \tag{37}$$

gdzie $\hat{\Phi}^* = (X^{*}{}'X^*)^{-1}X^{*}{}'Y^*$ i $\hat{\Sigma}_u^* = Y^{*}{}'Y^* - Y^{*}{}'X^*(X^{*}{}'X^*)^{-1}X^{*}{}'Y^*$, (por. np. Zellner, 1971; Poirier, 1995; Koop, 2003). Rozkład $p(\Phi,\Sigma_u|Y^*,\lambda)$ aproksymujący $p(\Phi,\Sigma_u|\theta, \lambda)$, jest przyjmowany jako rozkład *a priori* dla modelu wektorowej autoregresji, estymowanego na danych rzeczywistych. Rozkład ten należy do naturalnej rodziny sprzężonej do rozkładu normalnego dla funkcji wiarygodności modelu autoregresji dla danych rzeczywistych $\ell(\Phi,\Sigma_u|Y)$, w szczególności jest to iloczyn rozkładu odwróconego Wisharta dla Σ_u i macierzowego normalnego dla Φ, warunkowo względem Σ_u.

Znaczna liczebność danych sztucznych względem liczebności danych obserwowanych oznacza, że estymatory parametrów modelu hybrydowego będą pod silnym wpływem informacji wywodzących się z modelu równowagi ogólnej, a dokładniej z aproksymacji wektorową autoregresją rozwiązania zlinearyzowanej postaci modelu strukturalnego. Jeśli pomijamy dane symulacyjne w procesie wnioskowania, $(\lambda=T^*=0)$, to oszacowania parametrów modelu hybrydowego sprowadzają się do ocen parametrów uzyskanych w wektorowej autoregresji z nieinformacyjnym rozkładem *a priori*, zaś model równowagi ogólnej nie przekazuje informacji wynikającej z przyjętych do jego konstrukcji założeń. Optymalna wartość λ, znajdująca się w górnym zakresie możliwych jej wartości, w szczególności $(\lambda\to\infty)$, oznacza że model hybrydowy ma własności bliskie modelowi strukturalnemu, co bywa również uważane za argument przemawiający za odpowiednią jego specyfikacją, spełnieniem przez obserwacje restrykcji ekonomicznych i dobrym dopasowaniem do danych empirycznych.

Stosowanie procedury dolosowania danych sztucznych, jako metody wprowadzania do modelu hybrydowego informacji wstępnych, jest związane z pojawieniem się dodatkowej niepewności próbkowej, będącej konsekwencją symulacji obserwacji. Możliwa jest, w takiej sytuacji, modyfikacja wnioskowania i zastąpienie momentów empirycznych danych generowanych ich momentami teoretycznymi. W przypadku estymowanych modeli równowagi ogólnej można analityczne wyznaczyć teoretyczne momenty drugiego rzędu zmiennych obserwowalnych, na podstawie reprezentacji modelu równowagi ogólnej w przestrzeni stanów, i zastąpić nimi występujące w funkcji wiarygodności wektorowej autoregresji momenty empiryczne danych sztucznych (por. np. Del Negro i Schorfheide, 2004; Del Negro i Schorfheide, 2008). Rozwiązanie modelu strukturalnego w formie równania stanu jest dyskretnym liniowym układem dynamicznym, rzędu pierwszego, którego wartość oczekiwana oraz momenty drugiego rzędu, dla ustalonego θ, mogą zostać wyznaczone analitycznie.

Wektor wartości oczekiwanej zmiennych endogenicznych modelu równowagi ogólnej w stanie stabilnym $E(Y_t)$ jest równy F. Scentrowana macierz kowariancji wektora Y_t, wyznaczona na podstawie reprezentacji modelu strukturalnego w przestrzeni stanów, jest określona przez $\Sigma_y^{(0)} = C'\Sigma_s C + \Sigma_v$, natomiast pozostałe macierze (scentrowanych) autokowariancji są wyrażone formułą, $\Sigma_y^{(j)} = C' A^j \Sigma_s C$, dla $j=1,2,...p$, oraz $\Sigma_y^{(j)} = \Sigma_y^{(-j)}$, (zob. Warne i in., 2012). Macierz kowariancji zmiennych stanu w stanie stabilnym Σ_s jest bezpośrednio obliczana po rozwiązaniu równania Lapunowa:

$$A\Sigma_s A' + B\Sigma_\varepsilon B' = \Sigma_s, \tag{38}$$

które jest otrzymywane na podstawie definicji macierzy kowariancji wektora stanu:

$$E[(s_t - \bar{s})(s_t - \bar{s})'] = E[(As_{t-1} + B\varepsilon_t)(As_{t-1} + B\varepsilon_t)'] = A\Sigma_{s,(t)}A' + B\Sigma_{\varepsilon,(t)}B' = \Sigma_{s,(t)},$$

przy założeniu niezmienności w czasie $\Sigma_{s,(t)} = \Sigma_s$ i macierzy kowariancji szoków strukturalnych $\Sigma_{\varepsilon,(t)} = \Sigma_\varepsilon$, spełnienia przez macierz A warunków stabilności, niezależności wektora stanu s_t od wektora zakłóceń strukturalnych ε_t, oraz $E(s_t) = \bar{s} = 0$.

Aproksymacja modelu równowagi ogólnej modelem wektorowej autoregresji bez restrykcji jest dokonywana poprzez zastąpienie jej współczynników $\widetilde{\Phi}$ i $\widetilde{\Sigma}_u$ parametrami implikowanymi przez model strukturalny $\widetilde{\Phi}(\theta)$ i $\widetilde{\Sigma}_u(\theta)$, uzyskanymi na podstawie autoregresji dla momentów teoretycznych, warunkowo względem θ. Wartość oczekiwana wektora Y_t jest równa $E(Y_t) = F$ w modelu strukturalnym i $E(\widetilde{Y}_t) = \Phi'(\theta)\widetilde{X}_t$ w wektorowej autoregresji. Macierze niecentralnych momentów drugiego rzędu zmiennych obserwowalnych $\widetilde{Y}_t$ i $\widetilde{X}_t$, względem rozkładu parametrów modelu strukturalnego θ, są dane przez wartości oczekiwane (zob. Warne i in., 2012):

$$E_\theta(\widetilde{Y}_t\,\widetilde{Y}_t^{'}) = E_\theta[(\widetilde{\Phi}'\widetilde{X}_t + \widetilde{u}_t)(\widetilde{\Phi}'\widetilde{X}_t + \widetilde{u}_t)'] = E_\theta[(\widetilde{\Phi}'\widetilde{X}_t(\widetilde{\Phi}'\widetilde{X}_t)'] + E_\theta(\widetilde{u}_t\widetilde{u}_t') = \\ = \widetilde{\Phi}' X_t X_t \widetilde{\Phi} + \widetilde{\Sigma}_u = FF' + \Sigma_y^{(0)} = \Gamma_{yy}^*(\theta), \tag{39}$$

gdzie $E(Y_tY_t^{'}) = FF' + \Sigma_y^{(0)}$ w modelu równowagi ogólnej,

$$E_\theta(\widetilde{X}_t\,\widetilde{X}_t^{'}) = E\begin{bmatrix} 1 & \widetilde{Y}_{t-1}^{'} & \dots & \widetilde{Y}_{t-p}^{'} \\ \widetilde{Y}_{t-1} & \widetilde{Y}_{t-1}\widetilde{Y}_{t-1}^{'} & \dots & \widetilde{Y}_{t-1}\widetilde{Y}_{t-p}^{'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{Y}_{t-p} & \widetilde{Y}_{t-p}\widetilde{Y}_{t-1}^{'} & \dots & \widetilde{Y}_{t-p}\widetilde{Y}_{t-p}^{'} \end{bmatrix} = E_\theta\begin{bmatrix} 1 & F & \dots & F \\ F & \Sigma_y^{(0)} & \dots & \Sigma_y^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F & \Sigma_y^{p-1} & \dots & \Sigma_y^{(0)} \end{bmatrix} = \Gamma_{xx}^*(\theta), \tag{40}$$

dla $E_\theta(\widetilde{Y}_t\widetilde{Y}_{t-j}^{'}) = E_\theta[(\widetilde{\Phi}'\widetilde{X}_t + \widetilde{u}_t)(\widetilde{\Phi}'\widetilde{X}_{t-j} + \widetilde{u}_{t-j})'] = FF' + \Sigma_y^{(j)}$, $E_\theta(\widetilde{Y}_t\widetilde{Y}_{t-j}^{'}) = E_\theta(\widetilde{Y}_{t-j}\widetilde{Y}_t^{'})$ oraz:

$$E_\theta(\widetilde{X}_t\,\widetilde{Y}_t^{'}) = E_\theta\begin{bmatrix} \widetilde{Y}_t^{'} \\ \widetilde{Y}_{t-1}\widetilde{Y}_t^{'} \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_{t-p}\widetilde{Y}_t^{'} \end{bmatrix} = E_\theta\begin{bmatrix} F' \\ FF' + \Sigma_y^{(1)} \\ \vdots \\ FF' + \Sigma_y^{(p)} \end{bmatrix} = \Gamma_{xy}^*(\theta), \tag{41}$$

przy czym $E_\theta(\widetilde{X}_t\,\widetilde{Y}_t^{'}) = E_\theta(\widetilde{Y}_t\,\widetilde{X}_t^{'}) = \Gamma_{yx}^*(\theta)$. Model wektorowej autoregresji $\widetilde{Y}_t$ względem $\widetilde{X}_t$, bazujący na momentach teoretycznych determinuje rzutowanie parametrów modelu równowagi ogólnej θ w parametry wektorowej autoregresji, $\hat{\widetilde{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\widetilde{\Sigma}}_u(\theta)$.

Zamiana momentów empirycznych danych sztucznych $Y^{*}{}'Y^{*}$, $Y^{*}{}'X^{*}$ i $X^{*}{}'X^{*}$ na momenty teoretyczne $\Gamma_{yy}^*(\theta)$, $\Gamma_{xy}^*(\theta)$ i $\Gamma_{xy}^*(\theta)$, pochodzące z modelu równowagi ogólnej, prowadzi do następującego łącznego rozkładu *a priori* dla parametrów hybrydowego modelu wektorowej autoregresji:

$$p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda) = c_{(1)}^{-1}(\theta)\det(\Sigma_u)^{-(\lambda T + n + 1)/2} \times \\ \exp\{-0.5tr[\lambda T\Sigma_u^{-1}(\Gamma_{yy}^*(\theta) - \Phi'\Gamma_{xy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta)\Phi + \Phi'\Gamma_{xx}^*(\theta)\Phi)]\}, \tag{42}$$

gdzie $\widetilde{T} = \lambda T$, zaś stała normująca z rozkładu Wisharta jest równa:

$$c_{(1)}(\theta) = (2\pi)^{\frac{n(1+np)}{2}} \det(\lambda T\Gamma^*_{xx}(\theta))^{-\frac{n}{2}} \det(\lambda T\Sigma_u(\theta))^{-\frac{\lambda T-(1+np)}{2}} 2^{\frac{n(\lambda T-(1+np))}{2}} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left[\frac{\lambda T-(1+np)+1-i}{2}\right]. \quad (43)$$

Spełnienie warunku: $\lambda \geq (1+np+n)/T$ oraz odwracalność macierzy momentów $\Gamma^*_{xx}(\theta)$, oznaczają, że otrzymany rozkład jest właściwy (funkcja gęstości całkuje się do jedności) oraz niezdegenerowany (jego dziedzina nie jest ograniczona do pod-przestrzeni przestrzeni parametrów wektorowej autoregresji). Jeśli $\lambda=0$ to model połączony sprowadza się do wektorowej autoregresji bez restrykcji, natomiast jeśli $0<\lambda<(1+np+n)/T$ to otrzymany rozkład *a priori* jest niewłaściwy.

7. ROZKŁAD A POSTERIORI

Łączny rozkład *a posteriori* dla Φ i Σ_u, proporcjonalny do iloczynu funkcji wiarygodności $\ell(\Phi, \Sigma_u | Y)$ i rozkładu *a priori* $p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)$:

$$p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) \propto \ell(\Phi, \Sigma_u | Y) p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda), \quad (44)$$

ma postać rozkładu macierzowego normalnego – odwróconego Wisharta:

$$p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) = f_{MNIW}(\Phi, \Sigma_u | \; \hat{\Phi}^m, [\lambda T\Gamma^*_{xx}(\theta) + X'X], [(\lambda+1)T\hat{\Sigma}^m_u(\theta)]^{-1}, (1+\lambda)T-(1+np)), \quad (45)$$

i dany jest wzorem:

$$\begin{aligned} p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) = c^{-1}_{(2)}(\theta) \det(\Sigma_u)^{-[(1+\lambda)T+n+1]/2} \exp\{-0.5 tr\{\Sigma_u^{-1}[(Y-X\Phi)'(Y-X\Phi) + \\ + \lambda T(\Gamma^*_{yy}(\theta) - \Phi'\Gamma^*_{xy}(\theta) - \Gamma^*_{yx}(\theta)\Phi + \Phi'\Gamma^*_{xx}(\theta)\Phi)]\}\}, \end{aligned} \quad (46)$$

gdzie stała normująca jest równa:

$$\begin{aligned} c_{(2)}(\theta) = (2\pi)^{\frac{n(1+np)}{2}} \det(\lambda T\Gamma^*_{xx}(\theta) + X'X)^{-\frac{n}{2}} \det((1+\lambda)T\,\Sigma^m_u(\theta))^{-\frac{(1+\lambda)T-(1+np)}{2}} \times \\ \times 2^{\frac{n((1+\lambda)T-(1+np))}{2}} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left[\frac{\lambda T-(1+np)+1-i}{2}\right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Układ warunkowych rozkładów *a posteriori* ma postać:

$$p(\Sigma_u | Y, \theta, \lambda) = f_{IW}(\Sigma_u | \; (\lambda+1)T\hat{\Sigma}^m_u(\theta), (1+\lambda)T-(1+np), n), \quad (48)$$

$$p(\Phi|Y,\Sigma_u,\theta,\lambda)=f_{MN}^{(1+np)\times n}(\Phi|\,\hat{\Phi}^m(\theta),(\lambda T\Gamma_{xx}^*(\theta)+X'X),\Sigma_u^{-1}),\qquad(49)$$

gdzie wartość oczekiwana $\hat{\Phi}^m(\theta)=(\lambda T\Gamma_{xx}^*(\theta)+X'X)^{-1}(\lambda T\Gamma_{xy}^*(\theta)+X'Y)$ współczynników wektorowej autoregresji jest wypadkową momentów teoretycznych, pochodzących z modelu równowagi ogólnej, i momentów empirycznych danych obserwowalnych, oraz:

$$\hat{\Sigma}_u^m(\theta)=[(\lambda+1)T]^{-1}[(\lambda T\Gamma_{yy}^*(\theta)+Y'Y)-(\lambda T\Gamma_{yx}^*(\theta)+Y'X)\hat{\Phi}^m(\theta)].\qquad(50)$$

Macierze momentów teoretycznych, występujące w konstrukcji rozkładu *a priori* na podstawie modelu strukturalnego, mają również uzasadnienie, jako macierze graniczne, przy liczbie danych sztucznych T^* zmierzającej do nieskończoności: $\lim_{T^*\to\infty} Y^{*}{}'Y^*/T^*=\Gamma_{yy}^*(\theta)$. Analogiczne zależności zachodzą dla $\Gamma_{xx}^*(\theta)$ i $\Gamma_{xy}^*(\theta)$. Liczba obserwacji sztucznych $T^*\to\infty$, w modelu połączonym oznaczałaby, że wnioskowanie *a posteriori* sprowadza się do wnioskowania na podstawie modelu strukturalnego. Analiza zależności wartości oczekiwanej *a posteriori* od parametru wagowego λ jest możliwa po wyłączeniu wyrażenia $T(1+\lambda)$ z każdego z czynników występujących w równaniu dla $\hat{\Phi}^m(\theta)$:

$$\hat{\Phi}^m(\theta)=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\Gamma_{xx}^*(\theta)+\frac{1}{1+\lambda}T^{-1}X'X\right)^{-1}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\Gamma_{xy}^*(\theta)+\frac{1}{1+\lambda}T^{-1}X'Y\right),\qquad(51)$$

jeśli $\lambda\to\infty$ to $\hat{\Phi}^m(\theta)$ zmierza do funkcji ograniczenia $\widetilde{\Phi}(\theta)$, natomiast jeśli $\lambda\to 0$, to $\hat{\Phi}^m(\theta)$ jest bliskie estymatorowi najmniejszych kwadratów dla Φ, przy czym $\lambda\geq(1+np+n)/T$.

Konstrukcja modelu hybrydowego umożliwia wnioskowanie *a posteriori* o parametrach modelu równowagi ogólnej, które przebiega pośrednio, poprzez wnioskowanie o parametrach wektorowej autoregresji Φ i Σ_u, warunkowo względem współczynnika wagowego λ. Brzegowy rozkład *a posteriori* $p(\theta|Y,\lambda)$, jest uzyskiwany na podstawie wzoru Bayesa: $p(\theta|Y,\lambda)=p(Y|\theta,\lambda)p(\theta)/\,p(Y|\lambda)$, gdzie $p(Y|\lambda)=\int p(Y|\theta,\lambda)p(\theta)d\theta$ jest brzegową, względem wszystkich parametrów modelu hybrydowego, gęstością obserwacji. Warunkowa względem θ i λ oraz brzegowa względem Φ i Σ_u gęstość obserwacji w modelu hybrydowym dana jest przez:

$$p(Y|\theta,\lambda) = \int p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)d(\Phi,\Sigma_u) = \frac{p(Y|\Phi,\Sigma_u)p(\Phi,\Sigma_u|\theta,\lambda)}{p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta,\lambda)} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{nT}{2}} \frac{c_{(2)}(\theta)}{c_{(1)}(\theta)} = \frac{\det(\lambda T\Gamma^*_{xx}(\theta) + X'X)^{-\frac{n}{2}} \det((1+\lambda)T\hat{\Sigma}^m_u(\theta))^{-\frac{(1+\lambda)T-(1+np)}{2}}}{\det(\lambda T\Gamma^*_{xx}(\theta))^{-\frac{n}{2}} \det(\lambda T\hat{\hat{\Sigma}}_u(\theta))^{-\frac{\lambda T-(1+np)}{2}}} \times \tag{52}$$

$$\times \frac{(2\pi)^{-\frac{nT}{2}} 2^{\frac{n((1+\lambda)T-(1+np))}{2}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left[\frac{(1+\lambda)T-(1+np)+1-i}{2}\right]}{2^{\frac{n(\lambda T-(1+np))}{2}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left[\frac{\lambda T-(1+np)+1-i}{2}\right]}.$$

Charakterystyki rozkładu *a posteriori:* $p(\theta|Y,\lambda) \propto \ell(\theta|Y,\lambda)p(\theta)$ są otrzymywane numerycznie, z zastosowaniem algorytmu Metropolisa i Hastingsa (zob. np. Schorfheide, 2000; Del Negro i Schorfheide, 2004; Adjemian i in., 2008). W przypadku, kiedy λ traktujemy jako dodatkowy parametr podlegający estymacji, łączny rozkład *a posteriori* $p(\Phi,\Sigma_u,\theta,\lambda|Y)$ jest iloczynem rozkładu macierzowego normalnego – odwróconego Wisharta dla $p(\Phi,\Sigma_u|Y,\theta,\lambda)$ i rozkładu prawdopodobieństwa o niestandardowej postaci dla $p(\theta,\lambda|Y)$, przybliżanej przez MCMC.

8. PODSUMOWANIE

Opracowanie zawiera omówienie budowy i wnioskowania w modelu wektorowej autoregresji, w którym rozkład *a priori* dla macierzy współczynników i kowariancji jest generowany na podstawie estymowanego modelu równowagi ogólnej. Przyjęcie do konstrukcji rozkładu *a priori* modelu ekonometrycznego, u podstaw którego leżą założenia implikowane przez teorię mikro i makroekonomii, pozwala na uwzględnienie różnych jej aspektów w modelu połączonym, w szczególności umożliwia testowanie stopnia potwierdzenia alternatywnych założeń przez dane empiryczne. Kluczową rolę w modelu połączonym wektorowej autoregresji i równowagi ogólnej odgrywa parametr wagowy, odpowiedzialny za udział informacji *a priori*. Parametry modelu połączonego są estymowane technikami bayesowskimi, co umożliwia formalne ujęcie niepewności związanej z ocenami parametrów *a posteriori*. Artykuł stanowił syntezę informacji teoretycznych związanych z metodologią DSGE-VAR, będących etapem wstępnym badań empirycznych.

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

LITERATURA

[1] Adjemian A., DarracqPariès M., Moyen S., (2008), Towards a Monetary Policy Evaluation Framework, *European Central Bank Working Paper* No. 942, Frankfurt am Main, Germany.

[2] Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M., (2008), Evaluating an Estimated New Keynesian Small Open Economy Model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, 32 (8), 2690–2721.

[3] An S., Schorfheide F., (2007), Bayesian Analysis of DSGE Models – Rejoinder, *Econometric Reviews*, Taylor and Francis Journal, 26 (2–4), 211–219.

[4] Brzoza-Brzezina M., Kolasa M., (2012), Bayesian Evaluation of DSGE Models with Financial Frictions, *National Bank of Poland Working Paper* 109.

[5] Chow H. K., McNelis P. D., (2010), Need Singapore Fear Floating? A DSGE-VAR Approach, *Research Collection School of Economics*, Paper 1250.

[6] DeJong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H., (1996), A Bayesian Approach to Calibration, *Journal of Business & Economic Statistics*, American Statistical Association, 14 (1), 1–9.

[7] Del Negro M., Schorfheide F., (2004), Priors from General Equilibrium Models for VARs, *International Economic Review*, 45 (2), 643–673.

[8] Del Negro M., Schorfheide F., (2008), Forming Priors for DSGE Models, (and How It Affects the Assessment of Nominal Rigidities), *Journal of Monetary Economics*, Elsevier, 55 (7), 1191–1208.

[9] Del Negro M., Schorfheide F., Smets F., Wouters R., (2007), On the Fit of New-Keynesian Models, *Journal of Business & Economic Statistics*, American Statistical Association, 25 (2), 123–143.

[10] Doan T., Litterman R., Sims C., (1983), Forecasting and Conditional Projections Using Realistic Prior Distributions, *NBER Working Papers* 1202, National Bureau of Economic Research, Inc.

[11] Gallant R. A., McCulloch R. E., (2009), On the Determination of General Scientific Models with Application to Asset Pricing, *Journal of the American Statistical Association*, American Statistical Association, 104 (485), 117–131.

[12] Ingram B. F., Whiteman C. H., (1994), Supplanting Minnesota Prior. Forecasting Macroeconomic Time Series Using Real Business Cycle Model Priors, *Journal of Monetary Economics*, Elsevier, 34 (3), 497–510.

[13] Ireland P. N., (2004), A Method for Taking Models to the Data, *Journal of Economics Dynamic & Control*, Elsevier, 28 (6), 1205–1226.

[14] Kolasa M., Rubaszek M., Skrzypczyński P., (2012), Putting the New Keynesian DSGE Model to the Real-time Forecasting Test, *Journal of Money, Credit and Banking*, Blackwell Publishing, 44 (7), 1301–1324.

[15] Koop G., (2003), *Bayesian Econometrics*, Wiley, England.

[16] Lee K., Matheson T., Smith C., (2007), Open Economy DSGE-VAR Forecasting and Policy Analysis, Head to Head with the RBNZ Published Forecasts, *Reserved Bank of New Zealand Discussion Paper* Series, DP2007/01.

[17] Litterman R., (1986), Forecasting with Bayesian Vector Autoregression, Five Years of Experience, *Journal of Business & Economic Statistics*, American Statistical Association, 4 (1), 25–38.

[18] Liu G., Gupta R., (2008), Forecasting the South African Economy, A DSGE-VAR Approach, *Working Paper* 2008–32, Tilburg University, Center for Economic Research.

[19] Poirier D. J., (1995), *Intermediate Statistics and Econometrics: A Comparative Approach*, MIT Press, Hong Kong.

[20] Schorfheide F., (2000), Loss Function Based Evaluation of DSGE Models, *Journal of Applied Econometrics*, John Wiley and Sons, Ltd., 15 (6), 645–670.

[21] Sims C. A., Zha T., (1998), Bayesian Methods for Dynamic Multivariate Models, *International Economic Review*, Department of Economics, University of Pennsylvania and Osaka University Institute of Social and Economic Research Association, 39 (4), 949–968.

[22] Theil H., Goldberger A. S., (1961), On Pure and Mixed Estimation in Economics. *International Economic Review*, 2 (1), 65–78.
[23] Warne A., Coenen G., Christoffel K., (2012), Forecasting with DSGE-VAR Models, manuscript – Directorate General Research, European Central Bank, *manuscript* – Directorate General Research, European Central Bank.
[24] Watanabe T., (2007), The Application of DSGE-VAR Model to Macroeconomic Data in Japan, *ESRI Discussion Paper* Series 225–E.
[25] Wróbel-Rotter R., (2007a), Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation, w: Welfe W., Wdowiński P. (red.), *Modelling Economies in Transition* 2006, Łódź, Wydawnictwo "Green", 9–26.
[26] Wróbel-Rotter R., (2007b), Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych, *Folia Oeconomica Cracoviensia,* 48, 69–93.
[27] Wróbel-Rotter R., (2007c), Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej, *Przegląd Statystyczny,*54 (3), 25–48.
[28] Wróbel-Rotter R., (2008), Bayesian Estimation of a Dynamic General Equilibrium Model, w: Welfe A., (red.), *Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych*, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie – Oficyna Wydawnicza, 279–294.
[29] Wróbel-Rotter R., (2011a), Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Ekonomia, 869, 109–128.
[30] Wróbel-Rotter R., (2011b), Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Metody analizy danych, 873, 121–135.
[31] Wróbel-Rotter R., (2011c), Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Ekonomia, 872, 73–93.
[32] Wróbel-Rotter R., (2012a), Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej, w: Sokołowski A., (red.), *Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie*, seria: Metody analizy danych, 878, 143–162.
[33] Wróbel-Rotter R., (2012b), Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie,* seria Ekonomia, 879, 107–126.
[34] Wróbel-Rotter R., (2012c), Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie, *Folia Oeconomica Cracoviensia,* 53, 59–83.
[35] Wróbel-Rotter R., (2012d), Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej, *Folia Oeconomica Cracoviensia*,53, 85–112.
[36] Wróbel-Rotter R., (2013a), Estymowane modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Metody Analizy Danych, (w druku).
[37] Wróbel-Rotter R., (2013b), Estymowane modele równowagi ogólnej i autoregresja wektorowa. Aspekty praktyczne, *Przegląd Statystyczny,*(w druku).
[38] Wróbel-Rotter R., (2013c), Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy, *Bank i Kredyt*, (w druku).
[39] Wróbel-Rotter R., (2013d), Hybrydowy model wektorowej autoregresji – analiza empiryczna funkcji odpowiedzi na zakłócenia strukturalne, manuscript niepublikowany.
[40] Zellner A., (1971), *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, John Wiley and Sons, Ltd., New York.

ESTYMOWANE MODELE RÓWNOWAGI OGÓLNEJ I AUTOREGRESJA WEKTOROWA. ASPEKTY TEORETYCZNE

Streszczenie

Model DSGE-VAR składa się z dwóch modeli autoregresji wektorowej: pierwszy z nich, pomocniczy, jest aproksymacją estymowanego modelu równowagi ogólnej, zapisanego w formie reprezentacji w przestrzeni stanów, i służy konstrukcji rozkładu *a priori* dla drugiego, szacowanego dla danych obserwowanych. Łączne wnioskowanie o parametrach modelu strukturalnego i autoregresyjnego jest możliwe po zbudowaniu odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa, stanowiących podstawę metod bayesowskich. Kluczową rolę pełni parametr wagowy, ustalający optymalne proporcje obydwu podejść i mający zasadnicze znaczenie dla oszacowania brzegowej gęstości obserwacji, stanowiącej podstawę do porównań mocy wyjaśniającej modeli. Artykuł stanowi syntezę informacji teoretycznych związanych z metodologią DSGE-VAR, i może być traktowany jako etap wstępny i wprowadzający w badania empiryczne.

Słowa kluczowe: DSGE-VAR, dynamiczny stochastyczny model równowagi ogólnej, wnioskowanie bayesowskie, specyfikacja rozkładu *a priori*

AN ESTIMATED GENERAL EQUILIBRIUM MODEL AND VECTOR AUTOREGRESSION. THEORETICAL ASPECTS

Abstract

The DSGE-VAR model consists of two models of vector autoregressions: the first one approximates linearised solution of the dynamic stochastic general equilibrium model and is used as a tool for construction of a prior distribution for the second one, estimated with the observed data. Combined inference is possible on the basis on probability distributions with the Bayesian techniques. The key role in the hybrid model is played by the weighting parameter that defines the relative proportions of the structural and autoregressive models. It has crucial impact for the marginal data density that allows to compare the power of different models. The main purpose of the paper is to present in details model assumptions and estimation.

Keywords: DSGE-VAR, dynamic stochastic general equilibrium model, Bayesian inference, prior specification